Lernzettel

Logik: Aussagenlogik und Prädikatenlogik

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Theoretische Grundlagen der Informatik
Erstellungsdatum:	September 19, 2025

Lernzettel: Logik: Aussagenlogik und Prädikatenlogik

(1) Grundbegriffe. Eine Aussage (eine Proposition) ist ein Satz, der wahr oder falsch ist. Eine aussagenlogische Variable (z. B. p, q, r) steht für eine Aussage, deren Wahrheitswert durch eine Belegung bestimmt wird.

(2) Aussagenlogik – Syntax und Semantik.

- Junktoren:
$$\neg F, \quad F \wedge G, \quad F \vee G, \quad F \rightarrow G, \quad F \leftrightarrow G$$
- Formeln (Aufbau):
$$F ::= p \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \rightarrow F \mid F \leftrightarrow F$$
- Semantik (Wahrheit in einer Belegung v):
$$v \models p \quad \text{operatorisch: } p \text{ ist in } v \textit{ wahr}$$
$$v \models \neg F \iff v \not\models F$$
$$v \models F \wedge G \iff (v \models F) \wedge (v \models G)$$
$$v \models F \vee G \iff (v \models F) \vee (v \models G)$$
$$v \models F \rightarrow G \iff \neg(v \models F) \vee (v \models G)$$
$$v \models F \leftrightarrow G \iff (v \models F) \leftrightarrow (v \models G)$$

(3) Gesetze und Normalformen.

- De Morgan:
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
- Doppelte Negation:
$$\neg\neg p \equiv p$$
- Äquivalenz-Implikationen:
$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
- Normalformen:
$$\text{KNF (CNF)}: \quad \varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i,\ C_i = \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$
$$l_{ij} \in \{p, \neg p\}$$
$$\text{DNF}: \quad \varphi = \bigvee_{i=1}^{k} D_i,\ D_i = \bigwedge_{j=1}^{t_i} l_{ij}$$

(4) Prädikatenlogik – Einführung.

- Erweiterung um Quantoren:

$$\forall x\,\varphi \quad \text{und} \quad \exists x\,\varphi$$

- Grundformen:

$$\text{Atomare Formeln: } P(t_1, \dots, t_k)$$

$$\text{Formeln: } \neg\varphi, \quad \varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi, \quad \forall x\,\varphi, \quad \exists x\,\varphi$$

- Semantik (I, s): Interpretation I mit Belegung s:

$$I, s \models P(t_1, \dots, t_k)$$

$$I, s \models \neg\varphi \iff \neg(I, s \models \varphi)$$
$$I, s \models \varphi \wedge \psi \iff (I, s \models \varphi) \wedge (I, s \models \psi)$$
$$I, s \models \varphi \vee \psi \iff (I, s \models \varphi) \vee (I, s \models \psi)$$
$$I, s \models \forall x\,\varphi \iff \text{für alle } d \in D: \ I, s[x \mapsto d] \models \varphi$$
$$I, s \models \exists x\,\varphi \iff \text{es existiert } d \in D \text{ mit } I, s[x \mapsto d] \models \varphi$$

(5) Beispiele.

- Aussagenlogik:

$$p \to q$$
$$p \vee \neg q$$

- Prädikatenlogik:

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$$
$$\exists x\,(R(x) \wedge S(x))$$

(6) Beweismethoden – Grundideen.

- Wahrheitstabellen für rein propositionale Formeln.
- Semantik für Quantorenlogik über Strukturen und Belegungen.
- Reduktion von Aussagen auf Normalformen zur Vereinfachung von Beweisen.