

Lernzettel

Die Chomsky-Hierarchie: Typ-0 bis Typ-3

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Theoretische Grundlagen der Informatik
Erstellungsdatum: September 19, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Theoretische Grundlagen der Informatik

Lernzettel: Die Chomsky-Hierarchie: Typ-0 bis Typ-3

(1) Grundidee und Hierarchie. Die Chomsky-Hierarchie ordnet formale Sprachen nach der Komplexität der Grammatiken bzw. Maschinen, die sie erzeugen bzw. erkennen. Es gilt eine strikte Inklusion

$$\text{Typ-3} \subsetneq \text{Typ-2} \subsetneq \text{Typ-1} \subsetneq \text{Typ-0}.$$

Jede Klasse hat eine äquivalente Maschinen- bzw. Grammatikbeschreibung:

Typ-3: reguläre Sprachen, endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

Typ-2: kontextfreie Sprachen, Pushdown-Automaten.

Typ-1: kontextsensitive Sprachen, linear begrenzte Automaten.

Typ-0: rekursiv aufzählbare Sprachen, Turingmaschinen.

(2) Typ-0: Unbeschränkte Grammatiken (rekursiv aufzählbare Sprachen). Eine Typ-0-Grammatik hat keine Beschränkung der rechten Seite der Produktionen. Sie kann beliebige Zeichenfolgen der Form $\alpha \rightarrow \beta$ erzeugen, wobei α und β von gewünschten Formen sind. Die erzeugbaren Sprachen $L(G)$ sind genau die rekursiv aufzählbaren Sprachen, equivalentes Maschinenmodell ist die Turingmaschine.

$$G = (V, \Sigma, R, S), \quad R \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*.$$

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}.$$

Typ-0 enthält alle anderen Typen der Hierarchie, ist aber nicht durch Beschränkungen limitiert.

(3) Typ-1: Kontext-sensitive Grammatiken (CSG). Produktionen sind nicht shrinkend: für jede Regel $\alpha \rightarrow \beta$ gilt $|\beta| \geq |\alpha|$, mit Ausnahme von Startsymbol $S \rightarrow \varepsilon$, falls ε in $L(G)$ enthalten ist und S nicht in der rechten Seite vorkommt. $L(G)$ ist genau eine kontextsensitive Sprache.

$$G = (V, \Sigma, R, S), \quad R \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*, \quad \forall \alpha \rightarrow \beta: |\beta| \geq |\alpha|.$$

Gleichwertig zu Linear-bounded Automata (LBA).

(4) Typ-2: Kontextfreie Grammatiken (CFG). Grammatiken mit einer linken Seite aus genau einem Nichtterminalsymbol A und rechte Seite $\gamma \in (V \cup \Sigma)^*$. $L(G)$ ist kontextfrei. Typ-2 entspricht Pushdown-Automaten (PDA).

$$G = (V, \Sigma, R, S), \quad R = \{ A \rightarrow \gamma \mid A \in V, \gamma \in (V \cup \Sigma)^* \}.$$

Beispiel für $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$:

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon.$$

(5) Typ-3: Reguläre Grammatiken (RG). Produktionen in rechts- oder linksläufiger Form, so dass höchstens ein Nichtterminus auf der rechten Seite steht. Typ-3-Languages lassen sich durch endliche Automaten (DFA/NFA) bzw. reguläre Ausdrücke beschreiben.

$$G = (V, \Sigma, R, S), \quad R \text{ rechtslinear z. B.: } S \rightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon.$$

Beispiel $L = (a|b)^*$ (hier generiert durch $S \rightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon$).

(6) Maschinenzuordnungen und Folgen der Hierarchie. - Typ-3 reguläre Sprachen endliche Automaten und reguläre Ausdrücke. - Typ-2 kontextfreie Sprachen Pushdown-Automaten. - Typ-1 kontextsensitive Sprachen linear begrenzte Automaten. - Typ-0 rekursiv aufzählbare Sprachen Turingmaschinen. Es gilt: $\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL} \subset \text{RE} = \text{Type-0}$.

(7) Wichtige Sätze und Kennzeichen. - Kleene'sche Eigenschaften: Für reguläre Sprachen sind Abschlussoperationen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gegeben. - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:

$$\exists p \in \mathbb{N} \forall w \in L, |w| \geq p \Rightarrow \exists x, y, z \text{ mit } w = xyz, |xy| \leq p, |y| > 0, xy^iz \in L \forall i \geq 0.$$

- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:

$$\exists p \in \mathbb{N} \forall w \in L, |w| \geq p \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \text{ mit } w = uvxyz, |vwx| \leq p, |vx| > 0, uv^iwx^iy \in L \forall i \geq 0.$$

- Inklusion: $\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL} \subset \text{RE}$ (Typ-0).

(8) Kurze Notation. - Typ-0: rekursiv aufzählbar (RE). - Typ-1: kontextsensitive Sprachen (CSL). - Typ-2: kontextfreie Sprachen (CFL). - Typ-3: reguläre Sprachen (RL).