

Lernzettel

Endliche Automaten: DFA/NFA und reguläre Sprachen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Theoretische Grundlagen der Informatik
Erstellungsdatum: September 19, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Theoretische Grundlagen der Informatik

Lernzettel: Endliche Automaten: DFA/NFA und reguläre Sprachen

(1) Grundbegriffe. Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein endlicher Automat besteht aus einer endlichen Zustandsmenge Q , dem Startzustand $q_0 \in Q$ und einer Menge von Akzeptanzzuständen $F \subseteq Q$.

DFA. Ein DFA ist das Quintupel

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

mit einer Übergangsfunktion

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q.$$

Für jedes $q \in Q$ und jedes Symbol $a \in \Sigma$ ist der Folgezustand eindeutig bestimmt.

NFA. Ein NFA ist das Quintupel

$$N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F),$$

mit einer Übergangsfunktion

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q),$$

also eine Menge möglicher Folgezustände. Epsilon-Übergänge (ε) sind erlaubt.

Sprachakzeptanz. Ein DFA akzeptiert genau jene Wörter $w \in \Sigma^*$, für die aus dem Startzustand q_0 durch Anwendung von δ entlang von w ein Endzustand $q \in F$ erreicht wird. Gilt dieselbe Definition für NFAs, jedoch existiert hierfür ein Pfad durch die epsilon-Überlegungen und Nichtdeterminismus.

(2) Eingrenzung: Deterministische vs. nichtdeterministische Automaten.

- DFA: $\delta(q, a)$ ist eindeutig; kein -Zwischenzustand.
- NFA: mehrere mögliche Folgezustände; -Übergänge möglich.

(3) Reguläre Sprachen. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist regulär, falls sie von einem DFA akzeptiert wird (bzw. von einem NFA akzeptiert wird oder durch einen regulären Ausdruck beschrieben ist).

(4) Regular-Ausdrücke und Umsetzungen. Reguläre Ausdrücke verwenden die Operatoren

$$\cup \text{ (Union), } \cdot \text{ (Konkatenation), } * \text{ (Stern),}$$

und erzeugen reguläre Sprachen. Zu jedem regulären Ausdruck existiert ein äquivalenter NFA (Thompson-Konstruktion) und ein DFA.

(5) Subset-Konstruktion (NFA $\rightarrow$ DFA). Aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ konstruiert man einen DFA $A = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ durch Powermenge $Q' = \mathcal{P}(Q)$. Für $S \subseteq Q$ und $a \in \Sigma$ gilt

$$\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \Delta(q, a).$$

Startzustand $q'_0 = \{q_0\}$ und $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$.

(6) Minimaler DFA und Äquivalenz von Zuständen. Zwei Zustände p, q sind äquivalent (gleich akzeptierende Fortsetzungen), wenn für alle Fortsetzungen $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta^*(p, w) \in F \quad \text{genau dann, wenn} \quad \delta^*(q, w) \in F.$$

Der minimale DFA hat genau eine Repräsentation bis isomorphie.

(7) Pumping-Lemma (für reguläre Sprachen). Es gibt eine Zahl $p \geq 1$ (Pumping-Länge), so dass für jede reguläre Sprache L und alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq p$ die Zerlegung $w = xyz$ mit

$$|xy| \leq p, \quad |y| > 0$$

gilt, und für alle $i \geq 0$ gilt

$$xy^iz \in L.$$

(8) Beispiele.

Beispiel 1: Even-Language über $\{a, b\}$ – alle Wörter mit gerader Länge. DFA mit zwei Zuständen:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad q_0 \text{ Startzustand}, \quad F = \{q_0\}, \\ \delta(q_0, a) &= q_1, \quad \delta(q_0, b) = q_1, \quad \delta(q_1, a) = q_0, \quad \delta(q_1, b) = q_0. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Anzahl der a s ist gerade (unabhängig von b). DFA mit zwei Zuständen:

$$\begin{aligned} Q &= \{p_0, p_1\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad p_0 \in Q, \quad F = \{p_0\}, \\ \delta(p_0, a) &= p_1, \quad \delta(p_0, b) = p_0, \quad \delta(p_1, a) = p_0, \quad \delta(p_1, b) = p_1. \end{aligned}$$

(9) Abschluss-Eigenschaften (kurz). Reguläre Sprachen bleiben regulär unter - Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern, - Schnitt und Komplement (für endliche Alphabete, durch DFA- oder NFA-Konstruktionen), - Abbildungen und Projektionen entsprechend den Zustandsmengen der DFAs.

(10) Kurznotizen. - NFAs und DFAs erkennen die gleiche Klasse von Sprachen (regulär). - Jeder NFA hat äquivalenten DFA, allerdings kann der DFA exponentiell in der Größe des NFAs sein. - Reguläre Sprachen lassen sich durch reguläre Ausdrücke, NFAs oder DFAs darstellen.