Lernzettel

Turingmaschinen, Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Theoretische Grundlagen der Informatik
Erstellungsdatum: September 19, 2025

Lernzettel: Turingmaschinen, Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

(1) Turingmaschine (deterministisch). Eine deterministische Turingmaschine (DTM) ist formal definiert als

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}),$$

mit

$$Q \text{ endlich}, \quad \Sigma \subseteq \Gamma, \quad \Gamma \text{ Bandalphabet}, \quad \delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}.$$

Ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ wird auf dem Band initialisiert, der Kopf beginnt links am Bandanfang. Die Berechnung erfolgt durch folgende Übergänge gemäß δ. Die TM akzeptiert, wenn der Zustand q_{acc} erreicht wird; sie lehnt ab, wenn der Zustand q_{rej} erreicht wird. Falls weder Akzept- noch Ablehnzustand erreicht wird, kann die Berechnung unendlich fortgesetzt werden.

(2) Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Rekursiv-Aufzählbarkeit. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist

- entscheidbar (rekursiv), falls es eine TM M gibt, die für jedes Eingabewort w hält und $w \in L$ genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$.

- rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar), falls es eine TM M gibt, die für alle $w \in L$ akzeptiert; für $w \notin L$ kann M endlos laufen.

Formale Zuordnungen:

$$L \text{ ist entscheidbar} \iff \exists M \text{ mit } L(M) = L \text{ und } M \text{ hält für alle Eingaben.}$$

$$L \text{ ist rekursiv aufzählbar} \iff \exists M \text{ mit } L(M) = L.$$

(3) Halteproblem und Unentscheidbarkeit. HALT $= \{ \langle M, w\rangle \mid M \text{ hält auf } w\}$.

Es ist unentscheidbar. Beweisidee (Skizze): Angenommen HALT sei entscheidbar durch eine Maschine H. Dann konstruiere eine TM D auf Eingabe x mit dem folgenden Verhalten:

$$D(x) = \begin{cases} \text{halt}, & \text{falls } M_x(x) \text{ NICHT hält,} \\ \text{loop}, & \text{falls } M_x(x) \text{ hält.} \end{cases}$$

Wendet man D auf D an, entsteht ein Widerspruch, da man durch H eine Entscheidung über das Verhalten von D auf D erhalten würde, die zu einem Widerspruch führt. Daher ist HALT unentscheidbar.

Zusatz: Das Problem $ATM = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ akzeptiert } w\}$ ist rekursiv aufzählbar (RE), aber nicht entscheidbar.

(4) Reduktionen (Many-One). Eine Viele-zu-eins-Reduktion $A \leq_m B$ bedeutet, dass es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit

$$x \in A \iff f(x) \in B \quad \text{für alle } x.$$

Schlussfolgerungen: - Falls B entscheidbar ist, dann ist A entscheidbar. - Falls A unentscheidbar ist, folgt B unentscheidbar (negativ); Reduktion liefert Beweis.

(5) Church-Turing und Modelle. Der Church-Turing-Satz besagt, dass alle intuitiven Modelle effektiver Berechnung durch Turingmaschinen abgebildet werden können. Formale Äquivalenzen existieren zueinander, z. B. Turingmaschinen Lambda-Kalkül -rekursive Funktionen. Damit stimmen intuitive und formale Konzepte der Berechenbarkeit überein.

Hinweis. In diesem Lernzettel wird der Fokus auf Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit gelegt. Die Thematik der Komplexität (P, NP, NP-Vollständigkeit) wird in späteren Abschnitten behandelt.