Lernzettel

P, NP, NP-Vollständigkeit und Reduktionen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Theoretische Grundlagen der Informatik
Erstellungsdatum:	September 19, 2025

Lernzettel: P, NP, NP-Vollständigkeit und Reduktionen

(1) Grundbegriffe und Einordnung.
$P = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M$ deterministische TM mit Laufzeit $O(n^k),$ sodass $L = \{x \mid M$ akzeptiert $x\}\}$.

$NP = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists V$ Verifikation mit polynomischer Laufzeit $p(n),$ sodass $x \in L \iff \exists y$ mit $|y| \leq p(|x|) \wedge V(x,y) = 1\}$.

Hinweis: P umfasst Probleme, die deterministisch in Polynomzeit lösbar sind. NP erfasst Probleme, deren Lösungen effizient verifiziert werden können, auch wenn das Lösen selbst möglicherweise nicht in Polynomzeit liegt.

Reduktionen:

$$A \leq_p B \iff \exists f : \Sigma^* \to \Sigma^* \text{ in polynomialer Zeit, so dass } x \in A \iff f(x) \in B.$$

NP-Hart und NP-Vollständigkeit.

$$\text{A ist NP-hard, falls } \forall L \in NP : \ L \leq_p A.$$
$$\text{A ist NP-vollständig, falls } A \in NP \text{ und } A \text{ ist NP-hard.}$$

(2) Wichtige Sätze und Charakterisierung.
Cook–Levin: SAT ist NP-vollständig.
Jeder Entscheidungsprozess in NP lässt sich in polynomieller Zeit auf SAT abbilden.

Beziehungen: $P \subseteq NP \subseteq EXP$.

(3) Typische NP-vollständige Probleme.

- SAT (in NP und NP-vollständig)
- 3-SAT (NP-vollständig)
- Vertex Cover (Entscheidungsvariante: gibt es ein Vertex-Cover der Größe k?)
- Clique (NP-vollständig)
- Hamiltonian Path / Hamiltonian Cycle (NP-vollständig)

(4) Formale Reduktionsbeispiele (Skizzen).
Reduktion 1: SAT → 3-SAT (polynomiell).
Aus jeder Klausel mit mehr als drei Literalen wird eine Kette von Klauseln mit je drei Literalien erzeugt, sodass die Erfüllbarkeit erhalten bleibt.

$$(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k) \ \to \ (l_1 \vee l_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee l_3 \vee z_2) \wedge \cdots \wedge (\neg z_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k),$$

wobei $z_1, \ldots, z_{k-3}$ neue Variablen sind.

Reduktion 2: 3-SAT → Vertex Cover (Karp-Reduktion).
Jede 3-SAT-Instanz $\phi = \bigwedge_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ wird in einen Graphen $G = (V, E)$ überführt, sodass G ein Vertex-Cover der Größe $k = m + n_v$ besitzt genau dann, wenn ϕ erfüllbar ist, wobei n_v die Anzahl der Variablen ist. Die Gadget-Planung pro Klausel erzwingt, dass mindestens ein Literal pro Klausel gewählt wird.

$$\phi \text{ erfüllbar} \iff G \text{ hat ein Vertex-Cover der passenden Größe.}$$

Hinweis: Die obigen Skizzen dienen der Orientierung; Details folgen aus der Standardliteratur. Die Reduktionen zeigen, wie NP-Hardness übertragen wird.

(5) Typische Reduktionsnotationen.

$$A \leq_p B \quad \text{und} \quad A \in \mathrm{NP},\ B \in \mathrm{NP} \quad \text{(im jeweiligen Kontext).}$$

(6) Übungsideen (ohne Lösung).
- Zeige, dass SAT in NP liegt, und skizziere die Cook–Levin-Begründung.
- Formuliere eine klare Definition von NP-Hardness und NP-Vollständigkeit mithilfe von Reduktionen.
- Skizziere die Reduktion von 3-SAT zu Vertex Cover auf hohem Niveau.