Lernzettel

Produktionsfunktion und Technologie: Faktorinputs, Grenzprodukte

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mikroökonomik (4 LP)
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Produktionsfunktion und Technologie: Faktorinputs, Grenzprodukte

(1) Produktionsfunktion. Die Produktionsfunktion beschreibt, wie viel Output Q mit gegebenen Mengen der Inputfaktoren erzeugt wird. Für zwei Inputs sei

$$Q = F(K, L),$$

mit K dem Kapital und L der Arbeit. Allgemein gilt: $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$.

Eigenschaften.

- Die Funktion ist typischerweise monoton steigend in jedem Input, d. h. $\frac{\partial F}{\partial L} \geq 0$ und $\frac{\partial F}{\partial K} \geq 0$ (unter bestimmten Annahmen >0).
- Häufig konkav, was schrumpfende Grenzerträge bedeutet.

Grenzprodukte. Der Grenzertrag des Arbeitseinsatzes bzw. des Kapitals misst, wie viel zusätzlicher Output entsteht, wenn ein Input um einen kleinen Betrag erhöht wird.

$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L}, \qquad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

Spezielle Form der Produktionsfunktion (Beispiel). Eine gängige Form ist die Cobb-Douglas-Funktion

$$F(L, K) = A\, L^{\alpha} K^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,\ A > 0.$$

Grenzprodukte bei Cobb-Douglas.

$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha\, A\, L^{\alpha-1} K^{1-\alpha}, \qquad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = (1-\alpha)\, A\, L^{\alpha} K^{-\alpha}.$$

MRTS und Isoquanten. Für gegebene Outputmenge Q beschreibt die Isoquant die Eingangskombinationen, die Q liefern. Die Steigung der Isoquant (MRTS) ergibt sich aus dem Verhältnis der Grenzprodukte:

$$\mathrm{MRTS}_{L,K} = -\frac{MP_L}{MP_K}.$$

Skalenerträge. Unter einer Skalierung der Inputs tL, tK gilt

$$F(tL, tK) = t^{\beta} F(L, K),$$

wobei $\beta > 1$ für zunehmende, $\beta = 1$ für konstante und $\beta < 1$ für abnehmende Skalenerträge steht.

Kosten- und Entscheidungsrelevanz. Für eine gegebene Outputmenge ist die optimale Wahl der Inputmengen eng mit dem Verhältnis der Grenzprodukte verknüpft, insbesondere bei Kostenminimierung.

(Fortführung): Technologische Entwicklungen verschieben die Produktionsfunktion nach oben, siehe Abschnitt (2).

(2) Technologie. Technologie umfasst alle Produktionsverfahren und -kenntnisse, die Output aus Input erzeugen. Eine technologische Verbesserung erhöht die Leistungsfähigkeit und verschiebt die Produktionsfunktion nach oben.

$$Q = F(K, L; t),$$

mit t als Indikator für den technologischen Stand. Für fortgeschrittene Technologien gilt

$$F(K, L; t_2) \geq F(K, L; t_1) \quad \text{für alle } K, L \text{ und } t_2 > t_1,$$

mit striktem$>$ sofern der Fortschritt auf mindestens eine Kombination wirkt.

Effekte auf Grenzprodukte. Durch eine Technologieverbesserung erhöhen sich in der Regel die Grenzprodukte:

$$MP_L(t_2) \geq MP_L(t_1), \qquad MP_K(t_2) \geq MP_K(t_1),$$

insbesondere bei gleicher Inputmenge K, L.

Kostenminimierung bei gegebener Produktion. Um bei gegebenen Preisen die Kosten zu minimieren, wählt das Unternehmen die Inputmengen so, dass das Grenzprodukt-Preis-Verhältnis dem Faktoreinsatzverhältnis entspricht:

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r},$$

wobei w der Lohnpreis und r der Kapitalkostensatz ist.

Lagrangeaner Darstellung (Kurz). Bei Minimierung von $C = wL + rK$ unter der Nebenbedingung $F(K, L) \geq Q$ ergibt sich aus dem Lagrangean

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda\,(Q - F(K, L)).$$

Die FOC liefern

$$w = \lambda\, MP_L, \quad r = \lambda\, MP_K \quad \Rightarrow \quad \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}.$$

Hinweise zur Praxis.

- Grenzprodukte liefern Hinweise darauf, wie produktiv der Einsatz eines zusätzlichen Faktors ist.
- Eine steigende Technologie verschafft denselben Einsatzmitteln mehr Output.
- Die Kombination aus Grenzprodukten und Faktorkosten bestimmt das optimale Inputverhältnis.