Lernzettel

Konforme Abbildungen und Anwendungen in Randwertproblemen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Konforme Abbildungen und Anwendungen in Randwertproblemen

(1) Grundbegriffe und Definitionen. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ ist konform, wenn sie holomorphen in D ist und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ gilt. Sei $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ mit $z = x + iy$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen lauten

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Die Ableitung lässt sich schreiben als

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Konforme Abbildungen erhalten lokale Winkel, d. h. sie sind winkeltreu (Orientierung erhalten).

(2) Wichtige Eigenschaft: Abbildungen, die Kreise/gerade Linien abbilden. Eine Möbius-Abbildung

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

bildet Kreise/Geraden auf Kreise/Geraden ab. Ihre Ableitung lautet

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

(3) Beispiele konformer Abbildungen. - Potenzabbildung: Sei $z = re^{i\varphi}$. Dann

$$f(z) = z^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Allgemeine lineare Fractionaltransformation wie oben (Möbius): Beispiel der Abbildung einer Kreislinie auf eine andere.

(4) Randwertprobleme und Konformabbildungen. Ziel: Randwertprobleme für Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D \subset \mathbb{C}, \quad u|_{\partial D} = g$$

durch eine konforme Abbildung auf eine einfachere Domäne zu übertragen.

- Wähle eine konforme Abbildung $\phi : D \to D'$ mit einfach zu behandelnder Domäne D' (z. B. Halbebene $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} w > 0\}$ oder Einheitskreis $\mathbb{D}$).
- Sei $w = \phi(z) = \xi + i\eta$. Ist F in D' analytisch, dann ist $u(z) = \Re F(\phi(z))$ eine harmonic Funktion in D.
- Falls $D' = \mathbb{H}$: Löse das Randwertproblem mit der Poisson-Formel

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta\, g(t)}{(t - \xi)^2 + \eta^2}\, dt, \qquad (\xi \in \mathbb{R},\, \eta > 0).$$

- Die Lösung in D erhält man durch

$$u(z) = U(\operatorname{Re} \phi(z), \operatorname{Im} \phi(z)).$$

(5) Anwendungen: Potenzialtheorie und Luftströmungen. Conforme Abbildungen ermöglichen die Lösung von Randwertproblemen in komplexen Geometrien durch Abbildung auf einfachere Domänen.

- *Joukowski-Abbildung*: Eine klassische Transformation

$$w(z) = z + \frac{a^2}{z}, \qquad a > 0.$$

  Sie bildet bestimmte Kreise in der z-Ebene auf Flügelformen in der w-Ebene ab. Die Abbildung dient in der Potenzialtheorie und der Aerodynamik der Modellierung von Strömungen um Flügel.

- Allgemeine Möbius-Transformationen $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ ordnen Kreise/ Geraden in der z-Ebene den Kreisen/Geraden in der w-Ebene zu und erlauben so die Umwandlung komplexer Randbedingungen zu einfacheren Formen.

(6) Vorgehensweise in der Praxis. - Problemformulierung: Bestimme D und g (Randwerte). - Wahl einer passenden konformen Abbildung $\phi : D \to D'$ (z. B. $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{D}$). - Bestimmung von F auf D' oder direkte Anwendung der Poisson-Formel. - Zurücktransport der Lösung nach D via $u(z) = \Re F(\phi(z))$.

(7) Übungsaufgaben. - **Aufgabe 1:** Zeigen Sie, dass $f(z) = z^2$ konform auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Hinweis: f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f'(z) = 2z \neq 0$ für alle $z \neq 0$.

- **Aufgabe 2:**Bestimmen Sie die Abbildung der Einheitskreis $|z| = 1$ durch die Möbius-Abbildung $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$. Diskutieren Sie, warum Kreise/gerade Linien zu Kreisen/geraden Linien abgebildet werden.

- **Aufgabe 3:** In der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ sei die Randbedingung für das Harmonic-U-System $U(x, 0) = g(x) = x^2$. Verwenden Sie die Poisson-Formel, um $U(x, y)$ in $\mathbb{H}$ zu bestimmen. Geben Sie anschließend eine konforme Abbildung ϕ an, mit der sich eine entsprechende Randwertaufgabe in eine andere Domäne überführen lässt. (Hinweis: Nutzen Sie, falls sinnvoll, eine einfache ϕ.)