Lernzettel

Wärmeleitung: Fourier-Gesetz, Wärmeleitfähigkeit und Temperaturfelder in Festkörpern

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Technische Wärmelehre (9 LP)
Erstellungsdatum:	September 20, 2025

Lernzettel: Wärmeleitung: Fourier-Gesetz, Wärmeleitfähigkeit und Temperaturfelder in Festkörpern

(1) Grundlagen der Wärmeleitung in Festkörpern

Der Wärmestrom pro Flächeneinheit (W/m^2) wird durch das Fourier-Gesetz beschrieben:

$$\mathbf{q} \;=\; -\,k\,\nabla T,$$

wobei k die Wärmeleitfähigkeit ist ($\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$) und ∇T der Temperaturgradient. In einem isotropen Festkörper gilt k als Skalar; bei anisotropen Medien wird stattdessen der Wärmeleitfähigkeits-Tensor $\mathbf{K}$ verwendet:

$$\mathbf{q} \;=\; -\,\mathbf{K}\,\nabla T.$$

(2) Wärmeleitungsgleichung (Energiegleichung)

Energieerhaltung: Stoffkonstante ρc (Dichte mal spezifische Wärmekapazität) und Wärmestrom quellenfrei ($\dot{q} = 0$) führen zur

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} \;=\; \nabla\cdot\,(k\,\nabla T).$$

Im isotropen, konstanten-medium wird daraus

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} \;=\; k\,\nabla^2 T \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial T}{\partial t} \;=\; \alpha\,\nabla^2 T,$$

mit der thermischen Diffusivität $\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$.

(3) Randbedingungen und Quellterm

- Dirichlet-Randbedingung (Temperaturvorgaben): $T|_{\partial\Omega} = T_D$.
- Neumann-Randbedingung (Wärmestromvorgaben): $-k\,\frac{\partial T}{\partial n} = q''_n$ an der Randfläche.
- Robin-Randbedingung (Kühlung/Strahlung, gemischt): $h\,(T - T_\infty) = -k\,\frac{\partial T}{\partial n}$.
- Volumensche Quellterm: $\dot{q}$ (W/m^3), z.B. $+q'''$ für interne Wärmequellen.

(4) Stationäre vs. transiente Wärmeleitung

- Stationär (stetiger Zustand): $\partial T/\partial t = 0$ und $\nabla\cdot\,(k\nabla T) + \dot{q} = 0$.
- Transiente Wärmeleitung: $\partial T/\partial t \neq 0$; Gleichung wie oben mit zeitlicher Ableitung.

(5) Wärmeleitung in Festkörpern – 1D und 3D Felder

- 1D (Stab/Rod) mit konstantem k und $\dot{q} = 0$:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

- Gleichung in 3D: $\rho c \partial T/\partial t = \nabla \cdot (k\,\nabla T) + \dot{q}$.

(6) Lösungseinschränkung: Temperaturfelder im festen Körper

- Stationäre, eindimensionale Lösung bei konst. k und $q''' = 0$ mit Randbedingungen $T(0) = T_0$, $T(L) = T_L$:
$$T(x) = T_0 + \frac{T_L - T_0}{L}\,x.$$
- Transiente 1D-Lösungen für feste Randbedingungen (Dirichlet) mittels Separation der Variablen:
$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t\right],$$
wobei B_n aus der Anfangsverteilung bestimmt wird.
- Für andere Geometrien (Quader, Zylinder) gelten ähnliche Grundprinzipien, aber die Eigenfunktionen ändern sich entsprechend.

(7) Materialdaten und Größenordnungen

- Typische Wärmeleitfähigkeiten:

  Metalle: $k \approx 10\text{–}\,400\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, Cu: $k \approx 385\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, Stahl: $k \approx 45\text{–}\,60\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.
- Spezifische Wärme c und Dichte ρ variieren stark; typ. Werte:
$$\rho c : \text{Metalle } \sim 1 \times 10^6\text{–}4 \times 10^6\ \mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}.$$
- Thermische Diffusivität $\alpha = k/(\rho c)$ typischerweise 10^{-6} bis 10^{-4} $\mathrm{m^2 s^{-1}}$.

(8) Kleines Beispiel

Beispiel 1 – stationärer Temperaturverlauf in einem Stab: Gegeben: Stab aus Stahl, Länge $L = 0.5\,\mathrm{m}$, Randtemperaturen $T(0) = 80°\mathrm{C}$ und $T(L) = 20°\mathrm{C}$, konstantes $k = 50\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Im stationären Gleichgewicht folgt ein linearer Temperaturverlauf:

$$T(x) = T(0) + \frac{T(L) - T(0)}{L}\,x = 80°\mathrm{C} + \frac{20°\mathrm{C} - 80°\mathrm{C}}{0.5\,\mathrm{m}}\,x = 80°\mathrm{C} - 120\,x \text{ (in C, mit } x \in [0, 0.5]).$$

(9) Wichtige Randbedingungen zusammengefasst

- Dirichlet (Temperatur fest): $T|_{\partial\Omega} = T_D$.
- Neumann (Wärmestrom fest): $-k\,\partial T/\partial n = q''_n$.
- Robin (gemischte Bedingung): $h(T - T_\infty) = -k\,\partial T/\partial n$.

(10) Anwendungsanmerkungen

- Wärmeleitung ist eine Schlüsselkomponente in der Energietechnik: Wärmetausch, Kühlung von Bauteilen, Passiv- und Aktivkühlung.
- In der Praxis werden oft numerische Verfahren (Finite-Differenzen-, Finite-Elemente-Verfahren) eingesetzt, um komplexe Geometrien und inhomogene Materialien zu behandeln.

Hinweis zur Formelsicherheit
Alle Formeln sind gegeben, um eine klare Struktur zu erleichtern. Beachte, dass Formeln separat stehen und nicht nebeneinander dargestellt werden.