

Lernzettel

Boolesche Algebra: Schaltungsentwurf, Normalformen und Vereinfachung

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Einführung in die Informatik - Vertiefung
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Einführung in die Informatik - Vertiefung

Lernzettel: Boolesche Algebra: Schaltungsentwurf, Normalformen und Vereinfachung

(1) Grundlagen der Booleschen Algebra. Die Boolesche Algebra modelliert logische Werte 0 und 1. Wichtige Operatoren sind:

$$\text{NOT: } \bar{A} \quad (\text{bzw. } A')$$

$$\text{AND: } AB \quad (\text{Konjunktion})$$

$$\text{OR: } A + B \quad (\text{Disjunktion})$$

$$\text{XOR: } A \oplus B$$

Wichtige Eigenschaften.

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$A + 0 = A, \quad A \cdot 1 = A$$

$$\text{Kommutativitat: } A + B = B + A, \quad AB = BA$$

(2) Schaltungsentwurf – Grundideen. Boolesche Funktionen lassen sich durch Gatter implementieren (NOT, AND, OR). Beispiel einer SOP-Form (Summe von Produkten):

$$f(A, B) = A\bar{B} + \bar{A}B$$

Das entspricht einem XOR-Gatter umgesetzt mit NOT-, AND- und OR-Gattern.

(3) Normalformen – DNF und CNF.

- *DNF* (Disjunktive Normalform): Eine ODER von UND-Verknufungen von Literalen.

$$f = \bigvee_k \bigwedge_{\ell \in L_k} l_\ell$$

- *CNF* (Konjunktive Normalform): Eine UND von ODER-Verknufungen von Literalen.

$$f = \bigwedge_k \bigvee_{\ell \in L_k} l_\ell$$

Minterme und Maxterme (Beispiel mit zwei Variablen). Fur A,B seien die Minterme:

$$m_0 = \bar{A}\bar{B}, \quad m_1 = \bar{A}B, \quad m_2 = A\bar{B}, \quad m_3 = AB.$$

Maxterme (jeweils 0 bei der entsprechenden Eingabe):

$$M_0 = A + B, \quad M_1 = A + \bar{B}, \quad M_2 = \bar{A} + B, \quad M_3 = \bar{A} + \bar{B}.$$

Beispiele:

- Canonische DNF, $f = 1$ bei m_1 und m_2 (XOR):

$$f = m_1 + m_2 = \bar{A}B + A\bar{B}.$$

- Kanonische CNF, $f = 1$ bei m_1 und m_2 :

$$f = M_0 \cdot M_3 = (A + B)(\bar{A} + \bar{B}).$$

(4) Vereinfachungsverfahren.

- Karnaugh-Map (2 Variablen) – einfache Visualisierung zur Minimalisierung.

	$B = 0$	$B = 1$
$A = 0$	f_{00}	f_{01}
$A = 1$	f_{10}	f_{11}

Gruppierungen von 1en liefern die minimalen Produktterme.

- Quine–McCluskey – algebraischer Minimierungsalgorithmus (allgemein für mehrere Variablen).

(5) Beispiele zur Veranschaulichung. Beispiel 1: $f(A,B) = A'B + AB'$ (XOR).

$$\text{DNF (canonical): } f = \bar{A}B + A\bar{B}.$$

$$\text{CNF (kanonisch): } f = (A + B)(\bar{A} + \bar{B}).$$

Beispiel 2: $f(A,B) = AB + A'B'$

$$\text{DNF (kanonisch): } f = AB + \bar{A}\bar{B} = m_3 + m_0.$$

$$\text{CNF (kanonisch): } f = (A' + B)(A + B').$$

(6) Übungsaufgaben. - Aufgabe 1: Bestimme die kanonische DNF und kanonische CNF von $f(A,B) = A'B + AB'$. - Aufgabe 2: Gegeben ist $f(A,B) = (A + B)(A' + B')$. Bestimme eine minimale Form (DNF) und eine alternative CNF. - Hinweis: Nutze die Minterm- und Maxterm-Notation, sowie einfache Karnaugh-Maps zur Kontrolle.

(7) Kurze Zusammenfassung. - Boolesche Algebra modelliert 0/1-Werte mit NOT, AND, OR (und XOR). - Schaltungsentwurf lässt sich als SOP oder POS darstellen. - Normalformen: DNF (OR von ANDs) und CNF (AND von ORs). - Minterms liefern kanonische DNF, Maxterms liefern kanonische CNF. - Vereinfachung erfolgt typischerweise über Karnaugh-Maps oder Quine–McCluskey.