Lernzettel

Harmonische Größen und Darstellung zeitabhängiger Funktionen durch Fourier-Reihen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Elektrische Netzwerke
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Harmonische Größen und Darstellung zeitabhängiger Funktionen durch Fourier-Reihen

(1) Ziel und Einordnung. Dieses Teilthema behandelt die Zerlegung zeitabhängiger Signale in Harmonische. Durch Fourier-Reihen lassen sich periodische Funktionen als Summe von Sinus- und Kosinusgliedern darstellen. Damit erhält man eine Darstellung im Frequenzbereich, die in Netzwerken zur Analyse von Schwingungen und Harmonischen genutzt wird. Die Zeigerdarstellung (Phasor) wird ergänzend eingesetzt, um die Phasenbeziehungen zwischen Signalen zu verstehen.

(2) Grundlagen: Periodische Signale und Grundfrequenz. Eine periodische Funktion $f(t)$ hat eine Periode T und eine Grundfrequenz $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

(3) Fourier-Reihe (reale Form). Eine periodische Funktion $f(t)$ mit Periode T lässt sich darstellen als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\Big].$$

(4) Koeffizienten. Die Koeffizienten für eine periodische Funktion $f(t)$ mit Periode T (bzw. Grundfrequenz ω_0) lauten:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(n\omega_0 t)\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(n\omega_0 t)\,dt, \quad n \geq 1.$$

(5) Komplexe Exponentialform. Die Fourier-Reihe lässt sich auch in der komplexen Form schreiben:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega_0 t}\,dt.$$

(6) Eigenschaften und Konvergenz.

- Bei stückweise glatten Funktionen konvergiert die Reihe fast überall zu $f(t)$, im Knickpunkt zu $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.

(7) Beispiel 1: Rechtecksignal (Square Wave). Betrachte eine symmetrische Rechteckspannung mit Amplitude V und Periode T (Dauer 50

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4V}{n\pi}, & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Reihe lautet:

$$f(t) = \frac{4V}{\pi}\Big[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\Big], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

(8) Beispiel 2: Dreieckswellle (Triangle). Für eine symmetrische Dreiecks-Spannung mit Amplitude V und Periode T lautet die Reihe (nur ungerade Harmonische):

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\omega_0 t\right), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

(9) Komplexe Form – intuitiver Blick. Aus der komplexen Darstellung ergibt sich, dass jeder Harmonische n mit der Frequenz $\omega_n = n\omega_0$ einen Beitrag zur Gesamtspannung liefert:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt.$$

Dies ist besonders hilfreich, wenn man die Reaktion eines Netzwerks pro Harmonischer Frequenz betrachtet.

(10) Anwendung auf Netzwerke (Harmonische Analyse). Für eine lineare, zeitinvariante Schaltung gilt: jede Harmonische n sieht eine Impedanz $Z(j\,\omega_n)$ und erzeugt daraus eine Teilstrecke

$$I_n = \frac{V_n}{Z(j\,\omega_n)}, \quad \omega_n = n\omega_0.$$

Beispiel: Serielles R-L-C-Netzwerk mit

$$Z(j\omega) = R + j\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big).$$

Damit ergibt sich

$$I_n = \frac{V_n}{R + j\big(\omega_n L - \frac{1}{\omega_n C}\big)}.$$

Die Gesamtantwort ist dann die Summe der Beiträge aller Harmonischen:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{in\omega_0 t}.$$

(11) Praktische Hinweise.

- Modelle werden oft auf eine endliche Anzahl von Harmonischen (Trommel- oder Fensterung) genähert.
- Gibbs-Phänomen: Überschwinger nahe Sprungstellen, insbesondere bei kurzen Perioden.
- In der Praxis werden Fourier-Koeffizienten oft mit FFT in MATLAB/Spice-Skripten oder Python bestimmt.

(12) Weiterführende Aspekte.

- Beziehung zwischen Fourier-Reihe und Laplace-Transformation (Bei nicht periodischen Signalen bzw. transiente Antworten).
- Zusammenhang zu Bodendiagrammen (Magnitude/Phase über Frequenzen) zur Visualisierung des Frequenzverhaltens.
- Berücksichtigung von Normen, Sicherheit und Umweltaspekten bei netztechnischer Harmonischerbelastung.

Hinweis zur Praxis. Für reale Netzwerke ist es oft sinnvoll, die harmonische Anregung und deren Belastung zu prüfen, um verzerrungsbedingte Effekte zu vermeiden. Die Fourier-Analyse unterstützt bei der Beurteilung von Oberschwingungen und der Auslegung von Filtern.