Lernzettel

Zeigerdarstellung von Signalen und deren Verbindung zu Zeit- und Frequenzbereich

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Elektrische Netzwerke
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Elektrische Netzwerke

Lernzettel: Zeigerdarstellung von Signalen und deren Verbindung zu Zeit- und Frequenzbereich

(Schwierigkeitsstufe: Normal).

(1) Grundlagen der Zeigerdarstellung. Die Zeigerdarstellung nutzt komplexe Zahlen, um eine zeitabhängige Sinuskomponente als konstante Amplitude-Phase-Größe zu behandeln. Eine Gleichung eines Signals der Form

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

lässt sich schreiben als

$$v(t) = \Re\{\hat{V}\, e^{j\omega t}\}, \qquad \hat{V} = |\hat{V}|\, e^{j\varphi},$$

wobei $\hat{V}$ der Phasor ist. Die zeitabhängige Funktion erhält dadurch eine konstante Amplitude und eine Phasenlage im komplexen Ortsraum.

(2) Zeit- vs. Frequenzbereich.

- Im Zeitbereich ist das Signal eine reale Größe $v(t)$.
- Im Frequenzbereich wird das Signal durch seinen Phasor $\hat{V} = V_m e^{j\varphi}$ bzw. durch Impedanzen und Admittanzen beschrieben.

Für die rein sinusförmige Anregung gilt:

$$v(t) = \Re\{\hat{V} e^{j\omega t}\} = |\hat{V}| \cos(\omega t + \varphi).$$

Damit entspricht der Betrag des Phasors dem Amplitudenmaß des Signals und der Winkel φ der Phasenlage.

(3) Euler-Relation und Grundregeln.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

(4) Anwendungen in Netzwerken (Impedanzen). In der Phasor-Darstellung ersetzen Impedanzen die passiven Bauteile.

$$Z_R = R, \qquad Z_L = j\omega L, \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C}.$$

In einer netzwerkartigen Anordnung gilt für eine Spannung $\hat{V}$ und eine Gesamtimpedanz $\hat{Z}$:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}}, \qquad \text{signal}: \ i(t) = \Re\{\hat{I} e^{j\omega t}\}.$$

Beispiel (Serienkreis R–L–C, Grundfrequenz ω):

$$\hat{Z} = R + j(\omega L - \tfrac{1}{\omega C}).$$

Die Phasenlage des Stroms ist

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}, \quad i(t) = \Re\{\hat{I} e^{j\omega t}\}.$$

(5) Fourier- und Harmonik-Darstellung. Für periodische Signale lässt sich das Signal als Summe von Harmonischen darstellen:

$$v(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\big],$$

mit Grundfrequenz ω_0. Für jeden Harmonischen n kann man einen Phasor

$$V_n = V_{n,\mathrm{m}}\, e^{j\phi_n}$$

definieren, sodass gilt

$$v_n(t) = \Re\{V_n e^{jn\omega_0 t}\} = V_{n,\mathrm{m}} \cos(n\omega_0 t + \phi_n).$$

Die Beziehung zu a_n, b_n lautet

$$V_{n,\mathrm{m}} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \phi_n = \mathrm{atan2}(-b_n,\ a_n).$$

(6) Beispiele. Beispiel A: Ein Sinus

$$v(t) = 5\cos(3t + 20^\circ).$$

Phasor-Darstellung: $\hat{V} = 5\angle 20^\circ$. RMS-Wert: $V_{\mathrm{rms}} = 5/\sqrt{2}$.

Beispiel B: Phasor-Bild eines Netzwerks (RC-Glied bei Frequenz ω). Gegeben

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}), \quad \hat{V} = V_m \angle 0^\circ.$$

Dann ist

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z}, \qquad i(t) = \Re\{\hat{I} e^{j\omega t}\}.$$

(7) Verbindung zur Zeit- und Frequenzbereich – Kurzfassung.

- Zeitbereich: reale Signale $v(t)$ direkt gegeben.
- Frequenzbereich: komplexe Amplituden $\hat{V}$ bzw. Impedanzen $\hat{Z}(j\omega)$.
- In der Netzwerkanalyse ermöglicht die Zeigerdarstellung einfache Addition von Signalen und die Berechnung von Strömen und Spannungen durch Multiplikation mit Impedanzen.

(8) Hinweise zur Praxis. - Verwende für sinusförmige Eingänge die Phasor-Darstellung, um Gleichungen linearisierter Netzwerke zu lösen. - Zur Transientenanalyse eignen sich Laplace- oder Zeitbereichsverfahren; für stationäre Sinusbetrieb ist die Phasorenmethode besonders hilfreich. - Beachtung normativer Rahmenbedingungen und Nachhaltigkeit bei Netzwerken bleibt wichtig (Didaktische Orientierung des Kurses).

Zusammenfassung. Die Zeigerdarstellung verknüpft Zeit- und Frequenzbereich durch die Darstellung sinusförmiger Größen als Phasoren $\hat{V}$ und $\hat{I}$. Impedanzen im Frequenzbereich ermöglichen eine einfache Lösung von Netzwerken; Harmonische Anteile lassen sich jeweils als eigene Phasoren beschreiben, womit sich komplexe Signale aus reinen Harmonischen zusammensetzen.