Lernzettel

Ortskurven in transienten Vorgängen und Analyse von Schaltvorgängen niedriger Ordnung

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Elektrische Netzwerke
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Elektrische Netzwerke

Thema: Ortskurven in transienten Vorgängen und Analyse von Schaltvorgängen niedriger Ordnung

(1) Zielsetzung und Kontext.
Dieses Kapitel behandelt: - Ortskurven (Root Locus) als Werkzeug zur Visualisierung der Lage von Polen von Systemen in der komplexen Ebene, während ein Parameter (z. B. Gain) variiert. - Transiente Vorgänge in Netzwerken niedriger Ordnung (RC, RL, RLC) und deren Analyse im Zeit- wie im Frequenzbereich. - Ergänzende Methoden wie Laplace-Transformation, Ersatzschaltungen und einfache Zweitor-Netzwerke sowie deren Übertragungsfunktionen. - Grundlagen der Simulation mit SPICE und MATLAB sowie Bezüge zu Normen, Sicherheit und Nachhaltigkeit.

(2) Ortskurven in transienten Vorgängen.
- Ortskurven zeigen die Positionen der pole eines linearen Systems in der komplexen s-Ebene, während eine Systemgröße (z. B. Regler-Gain K) variiert wird. - Wichtige Erkenntnisse: Die Lage der Pole bestimmt Dämpfung, natürliche Frequenz und das Überschwingen eines transienten Signals. Umlagerungen der Pole führen zu Änderungen der Stabilität bzw. der Dynamik. - Einfaches Beispiel (ohne Formeln in der Abbildung): Ein erstes Ordnungssystem mit geschlossenem Regelkreis besitzt eine Pole, der sich mit K nach links verschiebt (s = a K). Damit steigt die Dämpfung mit zunehmendem K.

(3) Transiente Vorgänge niedriger Ordnung.
- Allgemeine Modellierung: eine gemütliche Reihe von passiven, linearen Bauteilen (R, L, C) und Quellen. Die Dynamik folgt einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, deren Lösung Aufschluss über Anstiegs- und Abklingverhalten gibt. - Typische Bauteilmodelle und Sprungantworten:

RC-Kreis (Sprungantwort)

Bei einer Gleichspannungsquelle V_s im Ruhestromfall, zeitverlaufende Spannung an der Kondensator-Kapazität $v_C(t)$:

$$v_C(t) = V_s \left(1 - e^{-t/(RC)}\right), \qquad i(t) = \frac{V_s}{R}\, e^{-t/(RC)},$$

mit der Zeitkonstante $\tau = RC$.

RL-Kreis (Sprungantwort)

Bei einer Gleichspannung V_s in Reihe mit R und L:

$$i(t) = \frac{V_s}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right), \qquad v_L(t) = V_s\, e^{-Rt/L}.$$

Die Endwertspannung/Endstromwerte entsprechen dem Gleichstrom-Niveau.

RLC-Kreis (Zweitor-System, Sprungantwort)

Für eine Serie RLC-Schaltung mit Schrittspannung V_s ergibt sich

$$LC\,\frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC\,\frac{dv_C}{dt} + v_C = V_s.$$

Mit

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \text{ (Dämpfungsgrad)},$$

lassen sich die transienten Antworten zusammenfassen.

- Unterdämpft ($\zeta < 1$):

$$v_C(t) = V_s\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)\right], \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

- Kritisch gedämpft ($\zeta = 1$) und überdämpft ($\zeta > 1$) folgen entsprechenden exponentiellen Zerlegungen mit den Polen $s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4L/C}$.

(4) Mathematische Werkzeuge.
- Laplace-Transformation: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$. - Lineare Zeitinvariante (LTI) Systeme: Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$. - Impedanzen in s-Domäne: $R \leftrightarrow R$, $sL \leftrightarrow$ Spule, $\frac{1}{sC} \leftrightarrow$ Kondensator. - Nullstellen und Pole bestimmen das zeitliche Verhalten; die Stabilität hängt von der Lage der Pole in der linken Halbebene ab. - Sprungantworten und Frequenzverhalten lassen sich durch die Transferfunktion ableiten. - Grundformel für den ungedämpften Zustand in Zweitor-Netzen und die Darstellung von Frequenzgänge (Bode) werden vermittelt.

(5) Transferfunktionen, Ersatz- und Zweitordgleichungen.
- Typische Vorgehensweise: Zeichne das Schaltbild, schreibe die Knoten- bzw. Maschengleichungen, wandle in den s-Bereich mit $\mathcal{L}$ um, erhalte die charakteristische Gleichung. - Zweitordnung als Standardform:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

- Offenes/geschlossenes Regelkreis-Konzept (Pol-Nullen) und das Root-Locus-Verfahren zur Untersuchung der Stabilität mit variierendem Gain.

(6) Frequenzbereich, Bodendiagramm und Fourier-/Laplace- Transformation.
- Übertragung und Stabilität lassen sich in der s-Ebene (Laplace) sowie im Frequenzbereich (Bode) beschreiben. - Fourier-Transformation ist ein Spezialfall der Laplace-Transformation für rein reelle, abklingende Signale.

(7) Simulationen und Praxis.
- SPICE- und MATLAB-Simulationen zur Verifikation von Transienten, Impuls- oder Sprungantworten. - Typische Aufgaben: Bestimme die Pole eines Netzwerks, zeichne die Ortskurve, verifiziere Sprungantworten, prüfe Einfluss von Dämpfung und Overshoot.

(8) Gesellschaftliche Verantwortung und Nachhaltigkeit.
- Die Netzwerkanalyse dient der Planung sicherer, zuverlässiger und umweltfreundlicher Energieversorgung. - Beachtung von Normen, Sicherheit und Gesundheitsaspekten bei der Auslegung von Schaltungen. - Berücksichtigung von Belastungen, Netzzuständen und Umweltaspekten bei der Auslegung.

(9) Hinweise zur Übungspraxis.
- Analysiere einfache RC-, RL- und RLC-Schaltungen zunächst zeit- und danach frequenzabhängig. - Nutze Laplace-Transformationen, um Transferfunktionen zu gewinnen, und betrachte anschließend die Ortskurve, falls sinnvoll. - Prüfe mit SPICE/MATLAB die theoretischen Ergebnisse und beobachte Abweichungen bei nicht-idealen Bauteilen.