

Lernzettel

Mehrpole Netzwerke: n-Pole, n-Tore, Vierpole;
Streuparameter von Vierpolen (Zweitore)

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Elektrische Netzwerke
Erstellungsdatum:	September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Elektrische Netzwerke

Lernzettel: Mehrpolige Netzwerke

Thema: Mehrpolige Netzwerke: n-Polen, n-Tore, Vierpole; Streuparameter von Vierpolen (Zweitore)

Hinweis zum Schwierigkeitsgrad: Normal. Dieser Lernzettel ordnet das Thema dem Kurs zu, behandelt aber sachlich die Grundlagen und wichtigsten Formeln.

(1) Grundlagen: Mehrpolige Netzwerke, Polzahl, Tore und Vierpole

Ein Mehrpoliges Netzwerk ist ein Netz mit mehreren externen Anschlüssen. Die Begriffe

- **n-Pol:** Netzwerk mit n Außenkontakten (Terminals).
- **n-Tore** bzw. **n-Port:** n Porten; jeder Port besitzt zwei gegenüberliegende Anschlüsse.

Vierpole bezeichnet ein Zwei-Port-Netzwerk mit insgesamt vier Anschlüssen (Port 1 und Port 2). Typische Beispiele sind Widerstandsnetze, RC- oder RL-Abschnitte, Koppler oder Transformer-Module. Die Orientierung der Ports erfolgt meist so, dass Port 1 die Eingangsseite und Port 2 die Ausgangsseite bildet.

(2) Struktur von Vierpolen und Ports

Ein Vierpol besitzt zwei Ports:

- Port 1: Außenkontakte 1 und 2
- Port 2: Außenkontakte 3 und 4

Jeder Port besitzt eine Eingangsseite (I) und eine Ausgangsseite (O) mit definierten Strom- und Spannungsrichtungen. Die Stellgrößen eines Vierpols lassen sich durch verschiedene Parametermodelle beschreiben (Z-, Y-, ABCD-, und Streuparameter).

(3) Streuparameter von Vierpolen (Zweitore)

Die Streuparameter (S-Parameter) beschreiben lineare, frequenzabhängige Reflexionen und Transmissionsverhältnisse eines Zwei-Port-Netzes im Frequenzbereich. Sie setzen voraus, dass die Ports mit einem Referenzimpedanz Z_0 abgeschlossen sind bzw. Referenzimpedanzen verwendet werden.

Definition der Vorzeichen und Variablen:

- Die Ströme (I_1, I_2) fließen jeweils in die Ports hinein.
- Die Spannungen (V_1, V_2) beziehen sich auf die Port-Referenzen.
- Die incident und reflected Waves (a_1, a_2, b_1, b_2) werden mit der Referenzimpedanz Z_0 definiert:

$$a_1 = \frac{V_1 + Z_0 I_1}{2\sqrt{Z_0}}, \quad b_1 = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{2\sqrt{Z_0}}, \quad a_2 = \frac{V_2 + Z_0 I_2}{2\sqrt{Z_0}}, \quad b_2 = \frac{V_2 - Z_0 I_2}{2\sqrt{Z_0}}.$$

Streuparameter (S-Parameter) definieren sich als:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}, \quad S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}, \quad S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}, \quad S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}.$$

Beziehung zu Z-Parametern: Für einen Zwei-Port mit gemeinsamen Referenzimpedanz Z_0 gilt die Transformation von Z- zu S-Parametern:

$$\Delta = (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21},$$

$$S_{11} = \frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{\Delta}, \quad S_{21} = \frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta},$$

$$S_{12} = \frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta}, \quad S_{22} = \frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{\Delta}.$$

Hinweis: Bei zueinander invertierbaren ($Z_{12} = Z_{21}$) und reciproken Netzwerken gilt oft $S_{12} = S_{21}$.

(4) Beispielrechnung (Z-Parameter, Vierpol)

Gegeben seien Z-Parameter eines Zwei-Port-Vierpols:

$$Z_{11} = 50 \, \Omega, \quad Z_{12} = Z_{21} = 5 \, \Omega, \quad Z_{22} = 50 \, \Omega, \quad Z_0 = 50 \, \Omega.$$

Berechne Δ und die S-Parameter.

Berechnungen:

$$Z_{11} + Z_0 = 100 \, \Omega, \quad Z_{22} + Z_0 = 100 \, \Omega, \quad Z_{12}Z_{21} = 25 \, \Omega^2.$$

$$\Delta = (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21} = 100 \cdot 100 - 25 = 9975.$$

$$S_{11} = \frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{\Delta} = \frac{(0)(100) - 25}{9975} \approx -2.51 \times 10^{-3}.$$

$$S_{21} = \frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 50}{9975} \approx 5.01 \times 10^{-2}.$$

$$S_{12} = \frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 50}{9975} \approx 5.01 \times 10^{-2}.$$

$$S_{22} = \frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{\Delta} = \frac{(100)(0) - 25}{9975} \approx -2.51 \times 10^{-3}.$$

Interpretation: - Reflexion an Port 1 und Port 2 ist sehr gering (fast 0 dB wenig Reflexion). - Transmission von Port 1 zu Port 2 (S_{21}) ist relativ klein (0.05, ca. -26 dB) bei diesem Beispiel. - Für reciproke Netzwerke gilt $S_{12} = S_{21}$; hier gilt in der Berechnung, dass beide gleich sind.

(5) Kurze Übungsaufgaben

- Gegeben sei ein Zwei-Port-Vierpol mit Z-Parametern $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ und Z_0 . Bestimme $S_{11}, S_{21}, S_{12}, S_{22}$ und interpretiere das Verhalten bei $Z_{12} = Z_{21}$ (reciprocal). - Zeige, dass bei symmetrischen, reciproken Vierpolen $S_{12} = S_{21}$ gilt. - Diskutiere, wie sich eine reine Lastanpassung an Port 2 (mit $Z_L = Z_0$) auf S_{11} auswirkt (mit $a_2=0$).

(6) Prinzipien und Zusammenhang

- Mehrpolige Netzwerke ermöglichen die Analyse von Eingangs- und Ausgangsverhalten über Tests an Ports, insbesondere in Frequenzbereichsanalyse und Transientenuntersuchungen. - Zweitorige Netzwerke ("Zweitore") sind zentrale Bausteine in der Netzwerkanalyse, deren Streuparameter die Kopplung und Übertragung zwischen Port 1 und Port 2 charakterisieren. - Die Streuparameter hängen von der Frequenz ab und setzen konfliktfrei arbeitende Referenzimpedanzen voraus. In der Praxis werden Messinstrumente bzw. Simulationswerkzeuge (z. B. SPICE, MATLAB) genutzt, um S-Parameter und deren Transformation zu anderen Parameterformen zu bestimmen.

(7) Praktische Hinweise für die Praxis

- Wähle für S-Parameter Messungen bzw. Simulationen eine sinnvolle Referenzimpedanz Z_0 (typisch 50 Ω). - Prüfe Symmetrie und Reziprozität ($S_{12} \approx S_{21}$ bei reziproken, passiven Vierpolen). - Nutze Transformationen zwischen Z-, Y- und S-Parametern, um passende Berechnungen zu ermöglichen. - Beachte, dass reale Netzwerke Verluste und parasitäre Elemente besitzen; idealisierte Modelle liefern oft nur eine Näherung.