Lernzettel

Fourier- und Laplace-Transformation in der Netzwerkanalyse

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Elektrische Netzwerke
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Fourier- und Laplace-Transformation in der Netzwerkanalyse

Schwierigkeitsstufe: Normal.

(1) Grundbegriffe – Überblick.
Transformationsmethoden dienen dazu, zeitabhängige Signale und Netzwerke effizient zu analysieren.
- Fourier-Reihe und Fourier-Transformation: Zerlegung zeitlicher Signale in Frequenzanteile; geeignet für periodische bzw. aperiodische Signale.
- Laplace-Transformation: Allgemeinere Transformation, die auch transiente Vorgänge und Anfangsbedingungen berücksichtigt; s $= \sigma + j\omega$.

(2) Fourier-Reihe (periodische Signale).
Für ein Signal mit Periode T gilt die Darstellung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt.$$

(3) Fourier-Transformation (allgemein).
Für allgemeine, beliebige Signale gilt die (feste) Transformierte

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

Inverse Fourier-Transformation:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

(4) Laplace-Transformation – Allgemein.
Für zeitdiskrete Anfangsbedingungen gilt

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Inverse Laplace-Transformation:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} X(s)\, e^{st}\, ds.$$

$$s = \sigma + j\omega.$$

(5) Eingesetzte Größen – ROC, Pole, Nullstellen.
- Heiligt ROC (region of convergence) bestimmt, wo das Integral konvergiert.
- Pole $s = p_i$ bestimmen das Verhalten im Frequenzbereich;
- Für kausale LTI-Systeme liegt die ROC rechts von dem rechten Polen und alle Pole sollten im linken Halbebenen liegen, damit das System stabil ist.

(6) Übertragungsfunktionen und Impulsantwort.
- Übertragungsfunktion eines LTI-Systems:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

- Frequenzgang: $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$.
- Impulsantwort:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}, \quad t \geq 0 \quad \text{(bei kausalen Systemen)}.$$

- Zusammenhang: y(t)=x(t)*h(t) bzw.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.$$

(7) Frequenzverhalten von Netzwerken.
- Rechenweg: Markiere Eingabe $X(s)$ und Ausgang $Y(s)$; bestimme $H(s) = Y(s)/X(s)$.
- Bei sinusförmigen Eingangssignalen $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ genügt ω und das Betrags-/Phasenverhalten von $H(j\omega)$.

(8) Beispielschaltungen – Transferfunktionen.
- RC-Druckerfilter (Spannung über C bei Reihenanordnung):
RC-Gesamtimpedanz in Serie: $Z_R + Z_C = R + \frac{1}{sC}$.
Ausgangsspannung über C:

$$H_{RC}^{\mathrm{LP}}(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1/(sC)}{R + 1/(sC)} = \frac{1}{1 + sRC}.$$

(9) Zeitbereichsantwort eines RC-Netzes.
Bei Eingang $v_{in}(t) = V_0 u(t)$ (Tritt) ist

$$v_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/(RC)}\right) u(t).$$

(10) Beispiel – RC-Hochpass.
Aufgabe: Ausgang über R? Bei Ausgang über R erhält man eine Hochpass-Übertragungsfunktion

$$H_{RC}^{\mathrm{HP}}(s) = \frac{Z_R}{R + Z_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC}.$$

Daraus folgt:

$$|H_{RC}^{\mathrm{HP}}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \angle H_{RC}^{\mathrm{HP}}(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right).$$

(11) Zweitord-Gliederungen – RLC.
Serie-RLC, Ausgang über C:

$$Z_{\mathrm{ges}}(s) = R + sL + \frac{1}{sC}, \quad H(s) = \frac{Z_C}{Z_{\mathrm{ges}}} = \frac{1/(sC)}{R + sL + 1/(sC)} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}.$$

(12) Nutzen für Simulationswerkzeuge.
- SPICE und MATLAB nutzen oft zeit- bzw. frequenzbasierte Modelle, um $H(j\omega)$ und Transientenverläufe zu berechnen.
- In SPICE lassen sich Laplace-Modelle über Transienten- und AC-Analysen realisieren; in MATLAB lassen sich symbolisch oder numerisch Transferfunktionen $H(s)$ und Frequenzgänge plotten.

(13) Gesellschaftliche Verantwortung und Normen.
- Berücksichtigung umweltfreundlicher Netze und sicherer Schaltungen zur Vermeidung von Gesundheitsgefahren.
- Beachtung relevanter Normen bei der Netzwerkanalyse, zur Gewährleistung von Sicherheit, Zuverlässigkeit und Energieeffizienz.

(14) Fazit – Verknüpfung von Zeit- und Frequenzbereich.
- Fourier- und Laplace-Transformation ermöglichen die Analyse von Netzwerken in Frequenz- und Zeitbereich.
- Übertragungsfunktionen $H(s)$ verknüpfen Eingangs- und Ausgangsgrößen, erleichtern Stabilitäts- und Reaktionsanalysen.
- Praxisbezug: Beherrschung von Impulsantwort, Frequenzgang, und zeitlicher Reaktion ist grundlegend für Design, Simulation und sichere Netzversorgung.