Lernzettel

Mathematische Grundlagen: Vektorrechnung, Integralrechnung, orthogonale Koordinatensysteme

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Grundlagen der Elektrotechnik (GLET)
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Mathematische Grundlagen: Vektorrechnung, Integralrechnung, orthogonale Koordinatensysteme

(1) Vektorrechnung.
Vektoren und Schreibweisen. Ein Vektor $\mathbf{a}$ schreibt sich typischerweise als Spaltenvektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$. Alternativ verwendet man Pfeilnotation $\vec{a}$.

Skalarprodukt. Der Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

und gilt auch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta,$$

wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.

Vektorprodukt (Kreuzprodukt). Im $\mathbb{R}^3$ ergibt sich

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

und die Betragsnorm des Rezeptionsprodukts gilt

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta.$$

Norm und Richtungen.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Eine Einheitsrichtung hat $|\hat{\mathbf{u}}| = 1$.

Ableitungen geometrischer Größen.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^{\top}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Koordinaten-Systeme und Projektionen. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}.$$

In der zylindrischen Darstellung (r, φ, z) schreibt man

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

und die Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z$ sind gegeben durch

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}, \qquad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}, \qquad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{z}}.$$

Beziehung zwischen kartesischen und zylindrischen Komponenten.

$$\mathbf{a} = a_r\,\hat{\mathbf{e}}_r + a_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + a_z\,\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Hinweis. In der Elektrotechnik treten oft Verschiebungen zwischen Bezugssystemen auf; daher ist es sinnvoll, die Abhängigkeiten von φ bzw. θ explizit zu notieren.

(2) Integralrechnung.
Riemann-Integral. Die eindimensionale Integration ist

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Fundamentalsatz der Analysis. Falls $F'(x) = f(x)$ gilt, dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Mehrdimensionale Integrale. Doppelte Integrale über eine Gebiet D gelten als

$$\iint_D f(x, y)\,dA.$$

Koordinatentransformationen und Flächenintegrale. In Polar- bzw. Zylinderkoordinaten gilt für Flächen- bzw. Volumenintegrale jeweils eine Änderung des Maßes:

$$dA = r\,dr\,d\varphi \quad \text{(Kreisfläche)}, \qquad dV = r\,dr\,d\varphi\,dz \quad \text{(Zylinderkoordinaten)},$$

und im Sphärischen Koordinatensystem

$$dV = \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

Lineare Integrale und Feldgrößen. Lineare Integrale eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$ längs einer Kurve C schreiben sich als

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

und Volumenintegrale einer Feldgröße g als

$$\iiint_E g\,dV.$$

(3) Orthogonale Koordinatensysteme.

Kartesisch, Zylinder und Kugel. Kartesisch: (x, y, z), Zylindrisch: (r, φ, z), Kugel: (ρ, θ, φ) mit üblicher Zuordnung.

Zuordnung und Umrechnung. Zylindrisch zu kartesisch:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Kugel (sogenannte Sphärische Koordinaten) zu kartesisch:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Jacobi-Determinante und Flächeninhalt/Volumen. Für Polar-/Zylinder-/Sphärische Koordinaten ergeben sich die jeweiligen Jacobianfaktoren:

$$dA = r\,dr\,d\varphi, \qquad dV = r\,dr\,d\varphi\,dz, \qquad dV = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

Unit-Vektoren in den Systemen. In Zylindrisch:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{z}}.$$

In Kugelkoordinaten:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Zusammenfassung. Orthogonale Koordinatensysteme ermöglichen einfache Formulierungen von Integralen und Vektorfeldern durch passende Koordinaten und Jacobians. In der Elektrotechnik erleichtert dies die Feld- und Flächenberechnungen in zylindrischen (Löcher, Leitungen) oder kugelförmigen Geometrien (Isolatoren, Felder um kugelförmige Objekte).