

# Lernzettel

## Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

**Universität:** Technische Universität Berlin  
**Kurs/Modul:** Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften  
**Erstellungsdatum:** September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!  
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für  
Ingenieurwissenschaften

**Lernzettel: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften**

**(1) Grundideen und Ziele.** Integraltransformationen verschieben ein Problem in einen anderen Rechenraum, wo Struktur und Lösungen oft leichter erkennbar sind. Typische Transformationspaare  $\mathcal{F}\{f\} \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{F\}$  bzw.  $\mathcal{L}\{f\} \leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F\}$  wandeln differentialoperatoren in algebraische Operationen um. Dies erleichtert die Behandlung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, insbesondere in der Elektrotechnik.

**(2) Fourier-Transformation.** Die Fourier-Transformation verwandelt Funktionen von der Zeit in den Frequenzraum.

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

**Wichtige Eigenschaften.** Linearität:  $\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}$ . Zeitverschiebung:  $\mathcal{F}\{f(t - \tau)\}(\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathcal{F}\{f\}(\omega)$ . Frequenzverschiebung:  $\mathcal{F}\{e^{i\nu t} f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \nu)$ . Parseval:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) \overline{\mathcal{F}\{g\}(\omega)} d\omega$ .

**(3) Laplace-Transformation.** Die Laplace-Transformation eignet sich besonders für Anfangswerten und gerichtete Probleme.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{st} ds.$$

**Wichtige Eigenschaften.** Linearität:  $\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$ . Zeitverschiebung:  $\mathcal{L}\{f(t - \tau)H(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$  mit der Heaviside-Funktion  $H$ . Differentiationsregel:  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$  (Analog für höhere Ableitungen).

**(4) Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen (PDEs).** - Typische PDEs: Wärmeleitung (Diffusionsgleichung), Wellen- und Laplace-Gleichung. - Transformationsstrategie: durch Fourier- oder Laplace-Transformation werden partielle Ableitungen zu algebraischen Faktoren, sodass sich lineare Gleichungen einfacher lösen lassen. Danach ist eine Rücktransformation erforderlich, um die Lösung in der ursprünglichen Variablen zu erhalten.

**(5) Beispiel: Wärmeleitung in einem unendlich langen Stab.** Betrachte die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$u_t(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

mit Anfangsbedingung  $u(x, 0) = f(x)$ .

Anwendung der Fourier-Transformation in  $x$  (mit  $\hat{u}(k, t) = \mathcal{F}_x\{u(\cdot, t)\}(k)$ ) liefert

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t) = -\alpha k^2 \hat{u}(k, t), \quad \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k).$$

Die Lösung ist

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-\alpha k^2 t}.$$

Rücktransformation liefert die gesuchte Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} e^{-\alpha k^2 t} dk.$$

**(6) Weiteres Beispiel: Wellengleichung (1D).** Für die Wellen-Gleichung

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Fourier-Transformation in  $x$  erhält man

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(k, t) = -c^2 k^2 \hat{u}(k, t),$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $t$  mit Lösung

$$\hat{u}(k, t) = A(k) \cos(c|k|t) + B(k) \sin(c|k|t).$$

Die Koeffizienten  $A(k), B(k)$  hängen von den Anfangsbedingungen ab. Rücktransformation liefert die Lösung  $u(x, t)$ .

**(7) Typische Transformations-Typen in der Ingenieurpraxis.** - Fourier-Transformationen für unendliche Räume oder periodische Randbedingungen. - Laplace-Transformationen für IVP- oder lineare ODE-/PDE-Probleme mit Anfangsbedingungen. - Kombinierte Methoden (z. B. Fourier in  $x$ , Laplace in  $t$ ) bei linearen, konstanten Koeffizienten.

**(8) Hinweise zur Anwendung.** - Prüfe Existenzbedingungen der Transformation (z. B. Integrierbarkeit oder Decay). - Wähle passende Normalisierung der Transformationen, um einfache Inverse zu erhalten. - Falls Randbedingungen vorhanden, nutze passende Transformationsvarianten (mit Leiteffekten, periodische Randbedingungen vs. unendlicher Domain). - Achte darauf, Transformationen nur auf geeignete Funktionen anzuwenden; dann narrative Schritte wie Invers- oder Rücktransformation sind sinnvoll.

**(9) Mini-Übungsaufgaben.** 1) Gebe die Fourier-Transformierte von  $f(t) = e^{-|t|}$  an und bestimme  $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t)$ . 2) Löse die Diffusionsgleichung  $u_t = u_{xx}$  mit Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \delta(x)$  (Dauerschwinger). 3) Zeige für die Wärmeleitung, dass bei  $f(x)$  mit endlichem  $\hat{f}(k)$  die Lösung  $u(x, t)$  durch die obige Integralform dargestellt werden kann.

**(10) Weiterführende Begriffe.** - Parseval-Eigenschaft, Plancherel-Theorem. - Bromwich-Integral und Region der Konvergenz. - Zerlegung in Eigenfunktionen und Superposition.