

Lernzettel

Grundlagen der Fourier- und Laplace-Transformation: Definitionen, Eigenschaften, Konvergenzgebiete und Inverse

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für
Ingenieurwissenschaften

Lernzettel: Grundlagen der Fourier- und Laplace-Transformation

(1) Definitionen. Fourier-Transformation (bilateral). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar. Die Transformation ist definiert durch

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Die zugehörige Inverse lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Laplace-Transformation (dauerhafte Zerspaltung ab $t \geq 0$). Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Die Transformation ist definiert durch

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Die (bilineare) Inverse lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

wobei γ so gewählt wird, dass das Integral konvergiert.

Konvergenzgebiete (kurz).

- Für die Fourier-Transformation gelten üblicherweise Bedingungen wie $f \in L^1(\mathbb{R})$ oder f ist abzählbar glatt und verschwindet ausreichend schnell am Unendlichen; dann existiert $\hat{f}$ und ist stetig/bBounded. In der Praxis gilt auch die L^2 -Theorie (Parseval/Plancherel).
- Für die Laplace-Transformation existiert ein Regions of Convergence (ROC). Es gilt in der Regel: Es existiert eine reelle Zahl a , so dass

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-at} dt < \infty,$$

dann konvergiert $F(s)$ in der Halbebene $\Re(s) > a$. Allgemein kann ROC als vertikale Streifen $\alpha < \Re(s) < \beta$ auftreten, abhängig von Verhalten von $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ bzw. $t \rightarrow 0^+$.

(2) Eigenschaften.

- **Linearität.**

$$\mathcal{F}\{af + bg\}(\omega) = a \hat{f}(\omega) + b \hat{g}(\omega).$$

$$\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = a F(s) + b G(s).$$

- **Verschiebung in der Zeit.**

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega).$$

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0) u(t - t_0)\}(s) = e^{-st_0} F(s),$$

wobei u die Heaviside-Funktion ist.

- **Skalierung.**

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

• **Ableitung.**

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) - f(0^+).$$

Allgemein,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) - \text{Terms involving } f^{(k)}(0^+) \quad (k < n).$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s F(s) - f(0^+).$$

Faltung.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

Parseval/Plancherel (L2).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

(3) Beispiele.

$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\}(s) = \frac{1}{s - a}, \quad \Re(s) > \Re(a).$$

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re(s) > 0 \quad (\text{falls } f(t) = 1 \text{ für } t \geq 0 \text{ betrachtet wird}).$$

(4) Inverse.

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad \gamma \in \mathbb{R} \text{ mit } \gamma \text{ im ROC.}$$

(5) Hinweis zur Anwendung. Transformationsmethoden wandeln zeitbasierte Probleme in den Frequenz- oder s-Raum um, um Muster zu erkennen und Lösungswege für lineare, zeitinvariante Systeme bzw. PDEs zu finden. Typische Anwendungen betreffen Signalverarbeitung, Wärme- bzw. Diffusionsgleichungen und Regelungstechnik.