Lernzettel

Faltungsprinzip und Convolution in Transformationsräumen: Signal- und Systemanalyse

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Faltungsprinzip und Convolution in Transformationsräumen: Signal- und Systemanalyse

(1) Definition der Faltung.

Für kontinuierliche Signale gilt

$$(f * g)(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Für diskrete Signale gilt (Idx. Koeffizienten)

$$(f * g)[n] \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, g[n-k].$$

(2) Faltungsprinzip in Transformationsräumen.

Strategisch wird die Faltung in den Transformationsraum überführt, wo sie sich oft als Produkt darstellt. Beispiele:

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) \;=\; F(\omega)\, G(\omega),$$
$$F(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad G(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) \;=\; F(s)\, G(s),$$
$$F(s) \;=\; \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt, \qquad G(s) \;=\; \int_{0}^{\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Hinweis: Unter geeigneten Konvergenzbedingungen gilt der Faltungsquervergleich analog für weitere Transformationen (z. B. Z-Transformation).

(3) Eigenschaften der Faltung.

- Kommutativität: $f * g = g * f$.
- Assoziativität: $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- Neutrales Element: $f * \delta = \delta * f = f$ mit $\delta(t)$ Dirac-Delta.

(4) Anwendungen in der Signal- und Systemanalyse.

Signal und System werden oft durch deren Impulsantwort beschrieben:

$$y(t) = (x * h)(t),$$

mit Eingangs-/Ausgangssignal $x(t)$ bzw. $y(t)$ und Impulsantwort $h(t)$.

Im Frequenzraum gilt das Faltungsprinzip:

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega).$$

(5) Diskrete Gegenstücke.
Diskret zeitdiskrete Signale:

$$y[n] = (x * h)[n] \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k],$$

$$Y(e^{j\omega}) \;=\; X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}).$$

(6) Beispiel: Glättungs- bzw. Boxcar-Filter.
Wähle das Impulsantwort-Glied

$$h(t) \;=\; \frac{1}{T}\, \mathbf{1}_{[0,T]}(t) \quad \text{(Boxcar-Filter)},$$

wobei $\mathbf{1}_{[0,T]}$ die Indikatorfunktion ist.

Zeitbereich:

$$y(t) \;=\; (x * h)(t) \;=\; \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau.$$

Frequenzbereich:

$$H(\omega) \;=\; \frac{1}{T} \int_{0}^{T} e^{-i\omega t}\, dt \;=\; \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\,\omega\,T}.$$

Damit gilt

$$Y(\omega) \;=\; X(\omega)\, H(\omega).$$

(7) Beispiel: Impulsantwort als Systembeispiel.
Ist $x(t) = \delta(t)$, dann ist der Ausgang

$$y(t) = (x * h)(t) = h(t).$$

(8) Hinweise zur Praxis.
- Konvergenzbedingungen muss man prüfen, damit Transformationsregeln gelten.
- In der Praxis werden oft numerische Näherungen der Faltung genutzt (z. B. Faltung via FFT).
- Die Raumbeziehung zwischen Zeit- und Frequenzbereich liefert intuitive Filterwirkungen.

(9) Notation zusammengefasst.
Faltung $(f * g)$ in Zeitraum, Transformationen $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{L}$ in Frequenz-/Komplexraum, Produktregeln

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\, \mathcal{F}\{g\}, \quad \mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\, \mathcal{L}\{g\}.$$