Lernzettel

Lösung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Transformationsmethoden (mit konstanten Koeffizienten)

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Lösung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Transformationsmethoden (mit konstanten Koeffizienten)

(1) Grundidee und Vorgehen. Die Lösung einer linearen ODGL mit konstanten Koeffizienten lässt sich durch die Laplace-Transformation behandeln. Wähle $y(t)$ definiert für $t \geq 0$. Wende $\mathcal{L}\{\,\cdot\,\}$ an:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0).$$

Daraus folgt eine algebraische Gleichung in $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Nach Lösung von $Y(s)$ folgt die Inverse Laplace-Transformation, um $y(t)$ zu erhalten. Falls eine äußere Freisetzung $f(t)$ vorhanden ist, gilt $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\,\mathcal{L}\{g\}$ und die Lösung ergibt sich durch Faltungsoperator.

(2) Laplace-Transformation – Kernformeln. Gegeben eine Differentialgleichung

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(t), \quad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1.$$

Wendet man $\mathcal{L}$ an, erhält man

$$(s^2 + as + b)Y(s) - sy_0 - y_1 - ay_0 = F(s),$$

mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Daraus folgt

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}.$$

Für homogene Gleichungen ($f(t) = 0$) gilt

$$Y(s) = \frac{sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}.$$

Die inverse Transformation liefert $y(t)$.

(3) Beispiel 1: Homogene Gleichung mit gegebenen Anfangswerten. Betrachte

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 1.$$

Wendet man die Laplace-Transformation an:

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) + (-sy_0 - y_1 + 3y_0) = 0.$$

Mit $y_0 = 4,\ y_1 = 1$ folgt

$$Y(s) = \frac{4s - 11}{(s-1)(s-2)}.$$

Durch partielle Bruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{7}{s-1} - \frac{3}{s-2}.$$

Die Inverse Transformation liefert

$$y(t) = 7e^t - 3e^{2t}.$$

(4) Beispiel 2: Nicht-homogene Gleichung. Löse

$$y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Hier ist $F(s) = \mathcal{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$ und

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)}.$$

Es gilt die Zerlegung

$$Y(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

(5) Allgemeine Hinweise zur Forcing-Funktion. Für eine Gleichung

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

mit $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1$ gilt

$$(s^2 + as + b)Y(s) - sy_0 - y_1 - ay_0 = F(s),$$

also

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}.$$

(6) Zusammenhang mit Fourier-Transformation. Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

ist das Pendant für Probleme auf dem unbeschränkten Zeitintervall. Für kausale bzw. Anfangswertprobleme ist die Laplace-Transformation das geeignetere Werkzeug. Die Fourier-Transformation spielt vor allem bei stationären Signalen eine zentrale Rolle.

(7) Übungsaufgaben. - Übungsaufgabe 1: Löse y" - 3 y' + 2 y = 0 mit y(0)=4, y'(0)=1. Lösung: $y(t) = 7e^t - 3e^{2t}$. - Übungsaufgabe 2: Löse y" + 3 y' + 2 y = $e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0. Lsung : y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$.