

Lernzettel

Anwendung auf elektrische Schaltungen: RC-,
RL-, RLC-Schaltungen, Zustandsgleichungen im
Zeit- und Frequenzbereich

Universität: Technische Universität Berlin

Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für
Ingenieurwissenschaften

Lernzettel: Anwendung auf elektrische Schaltungen – RC-, RL-, RLC-Schaltungen, Zustandsgleichungen im Zeit- und Frequenzbereich**(1) RC-Schaltung (Serie) mit Ausgang am Kondensator.**

Bei einer Serie RC-Schaltung wirkt $V_{in}(t)$ an eine Reihenschaltung aus Widerstand R und Kapazität C . Als Ausgang wählen wir typischerweise die Kondensatorspannung $V_C(t)$.

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_{in}(t) \implies \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC} v_C + \frac{1}{RC} V_{in}(t), \quad y(t) = v_C(t).$$

Zeitbereich (Zustandsgleichung).

Sei $x_1 = v_C$. Dann gilt $\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{RC}V_{in}(t)$, $y = x_1$.

Frequenzbereich (Laplace).

Für eine Eingangsgröße $V_{in}(s)$ und Ausgang $V_C(s)$ ergibt sich die Transferfunktion $H_{RC}^{(C)}(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{1+sRC}$.

Alternative Messgröße (Spule oder R).

Ausgang am Widerstand: $V_R(s) = RI(s)$ mit $I(s) = V_{in}(s)/(R + 1/(sC))$. Dann $H_{RC}^{(R)}(s) = \frac{V_R(s)}{V_{in}(s)} = \frac{sRC}{1+sRC}$.

Wichtige Randbedingungen (Beispiel).

Für einen Rechteck-Impuls $V_{in}(t) = V_0 u(t)$ gilt die Sprungantwort $v_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/(RC)})$, $t \geq 0$.

Zustandsgleichungen im Zeit- und Frequenzbereich (Zusammenfassung).

- Zeitbereich: $x_1 = v_C$, $\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{RC}V_{in}(t)$, $y = x_1$.

- Frequenzbereich: $H_{RC}(s) = \frac{1}{1+sRC}$.

(2) RL-Schaltung (Serie) mit Ausgang am Induktor.

Bei einer Serie RL-Schaltung gilt

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_{in}(t), \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}V_{in}(t), \quad y(t) = i(t).$$

Zeitbereich (Zustandsgleichung).

$x_1 = i$, $\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}V_{in}(t)$, $y = x_1$.

Frequenzbereich (Laplace).

$$H_{RL}(s) = \frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{sL + R} = \frac{1}{L} \frac{1}{s + R/L}.$$

Zustandsgleichungen im Zeit- und Frequenzbereich (Zusammenfassung).

- Zeitbereich: $\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}V_{in}(t)$, $y = x_1$.

– Frequenzbereich : $H_{RL}(s) = \frac{1}{sL + R}$.

(3) RLC-Schaltung (Serie) mit Ausgang am Kondensator.

Seriell geschaltet, Eingang $V_{in}(t)$, Ausgang $v_C(t)$. Die Grundgleichungen :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_C = V_{in}(t), \quad C \frac{dv_C}{dt} = i, \quad y(t) = v_C(t).$$

Zustandsgleichungen im Zeitbereich (Variante mit zwei Zuständen).

Wähle $x_1 = v_C$, $x_2 = i$. Dann gilt $\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$, $\dot{x}_2 = \frac{1}{L} (V_{in}(t) - R x_2 - x_1)$, $y = x_1$.

Frequenzbereich (Laplace).

Zustandsgleichung im Frequenzbereich liefert die Transferfunktion

$$H_{RLC}(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_C}{R + Z_L + Z_C} = \frac{1/(sC)}{R + sL + 1/(sC)} = \frac{1}{1 + sCR + s^2LC}.$$

Charakteristik und Parameter.

- Wichtige Größen: Trägheitskonstanten $\tau_0 = 1/\sqrt{LC}$, Dämpfungsmaß $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$.
- Falls $\zeta < 1$ (unterdämpft) : Ansatz einer gedämpften Schwingung, z.B. $v_C(t) = e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_d t)$ mit $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$.
- Transferfunktion für die Spannung über den Kondensator zeigt eine resonante Reaktion bei ω_0 .

Impedanz-Ansatz (Frequenzbereich).

Für die seriell verschalteten Bauteile gilt allgemein

$$Z_R = R, \quad Z_L = sL, \quad Z_C = \frac{1}{sC}, \quad Z_{\text{total}} = Z_R + Z_L + Z_C.$$

Bei Ausgang über den Kondensator ist

$$H_{RLC}(s) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{1/(sC)}{R + sL + 1/(sC)}.$$

Zusammenfassung der Transferfunktionen (RC, RL, RLC).

- RC (Ausgang über C): $H_{RC}(s) = 1/(1 + sRC)$.
- RL (Ausgang über R): $H_{RL}(s) = 1/(sL + R) = (1/L)/(s + R/L)$.
- RLC (Ausgang über C): $H_{RLC}(s) = 1/(1 + sCR + s^2LC)$.

Hinweise zur Praxis.

- Zustandsgleichungen ermöglichen die Simulation zeitlicher Abläufe mit Standard-Solversatz.
- Der Impedanzansatz vereinfacht das Auffinden der Frequenzantwort von Serien- oder Parallelanordnungen.
- Für reale Bauteile ergibt sich bei hohen Frequenzen oft eine Verschiebung durch parasitäre Größen; als Lernziel dient hier das Verständnis der Grundmodelle.