

Lernzettel

Wärmeleitungsgleichung und Diffusionsprozesse: Behandlung mit Fourier- und Laplace-Transformation

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für
Ingenieurwissenschaften

Lernzettel: Wärmeleitungsgleichung und Diffusionsprozesse: Behandlung mit Fourier- und Laplace-Transformation

(1) Modellierung und Grundgleichung.

In einem eindimensionalen Stab mit Temperaturverteilung $u(x, t)$ gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

wobei $\alpha > 0$ die thermische Diffusivität ist.

Rand- und Anfangsbedingungen. Beispiele:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\text{Dirichlet: } u(0, t) = u_0, \quad \text{Neumann: } \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = q_0(t),$$

bzw. für einen unendlichen Raum $\Omega = \mathbb{R}$ gilt oft

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty \quad (t > 0),$$

bzw. es wird eine Anfangsverteilung $u_0(x) = u(x, 0)$ gegeben.

(2) Fourier-Transformation in Raum (unendlicher Raum).

Definition der Fourier-Zeit-/Raum-Transformationspaare:

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk.$$

Anwendung auf die PDE liefert die transformierte Gleichung

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{u}(k, t), \quad \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k).$$

Lösung im Transformspektrum:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) e^{-\alpha k^2 t}.$$

Rücktransformation (Lösung in x, t):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(k) e^{-\alpha k^2 t} e^{ikx} dk.$$

Fundamentallösung (Faltungsdarstellung).

Für eine eindimensionale unendliche Leitung als Anfangsbedingung $u_0(x) = \delta(x - \xi)$ erhält man die

$$u(x, t) = G(x - \xi, t), \quad G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right).$$

Allgemein gilt die Faltungsdarstellung

$$u(x, t) = (G(\cdot, t) * u_0)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi.$$

(3) Laplace-Transformation in die Zeit.

Definition der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0.$$

Anwendung auf die PDE mit Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ ergibt

$$s U(x, s) - u_0(x) = \alpha \frac{d^2 U}{dx^2},$$

also die eindimensionale Rand-/Anfangsgleichung

$$\alpha \frac{d^2 U}{dx^2} - s U = -u_0(x), \quad s > 0.$$

Für den fallenden Fall der Homogenität ($u_0(x) = 0$) erhält man die allgemeine Lösung des homogenen Teils

$$\alpha U'' - s U = 0 \quad \Rightarrow \quad U(x, s) = A(s) e^{\sqrt{s/\alpha} x} + B(s) e^{-\sqrt{s/\alpha} x}.$$

Beachte: je nach Domäne und Randbedingungen bestimmt man die Koeffizienten $A(s), B(s)$. Die eigentliche Lösung in der Zeitdomain erhält man durch die Inverse Laplace-Transformation $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x, s)\}(t)$.

(4) Kombinierte Bemerkungen.

- Die Fourier-Transformation bearbeitet effektiv räumliche Faltungsstrukturen auf unendlichem Raum.
- Die Laplace-Transformation behandelt effizient die zeitliche Entwicklung inklusive Anfangsbedingungen.
- Eine kombinierte Anwendung (z. B. Laplace in Zeit, Fourier in Raum) führt zu geschlosseneren Darstellungen oder zu Green-Funktionen, die als Integrallösungen verwendet werden können.

(5) Anwendungen und Beispiele.

- Freier Raum: Diffusion einer anfänglichen Verteilungsfunktion $u_0(x)$; Lösung als Faltung mit dem Gauß-Kern.
- Periodische oder endliche Domänen: Einsatz der Fourier-Reihen bzw. der Fourier- bzw. Laplace-Transformationsmethoden unter passenden Randbedingungen; Ableitung von Lösungsmethoden wie Duhamel-Schen Gleichungen (Momentan-Lösung, Superpositionsprinzip).

(6) Kernformeln zum Merken.

- Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- Fourier-Transformationspaar:

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk.$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{u}, \quad \hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) e^{-\alpha k^2 t}.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(k) e^{-\alpha k^2 t} e^{ikx} dk.$$

- Fundamentallösung (Gauß): $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/(4\alpha t)}$.
- Laplace-Gleichung: $\mathcal{L}\{u\} = U(x, s)$, $\mathcal{L}\{\partial_t u\} = sU - u_0(x)$.

$$\alpha U'' - sU = -u_0(x).$$

Übungsfragen (Beispiele).

- Leite die transformierte Gleichung im Fourier-Raum für unendlichen Raum her.
- Zeige, dass bei $u_0(x) = C$ eine konstante Temperatur $u(x, t) = C$ ergibt (Hinweis auf - Initialbedingung).
- Bestimme die eindimensionale Lösung für eine Halb- oder Ganzdomäne mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen im Laplace-Raum.