Lernzettel

Randwertprobleme und Transformationsmethoden: Dirichlet-, Neumann- und Robin-Ränder; Umsetzung im Transformationsraum

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Lernzettel: Randwertprobleme und Transformationsmethoden

(1) Randwertprobleme – Überblick. Randwerte beschreiben das Verhalten einer Lösung an der Randoberfläche eines Gebietes. Typische Typen:

Dirichlet-Rand: $u = g_D$ auf der Randoberfläche Γ_D.
Neumann-Rand: $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g_N$ auf Γ_N.
Robin-Rand: $\alpha\, u + \beta\, \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_R$ auf Γ_R.
Oft gelten Randflächenkombinationen, z. B. $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ oder $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

(2) Randwerte in PDEs – Beispiele. Für eine PDE in einem Gebiet Ω mit Rand $\partial\Omega$:

$$\text{Dirichlet:} \quad u|_{\partial\Omega} = g_D, \qquad \text{Neumann:} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_N, \text{Robin:} \quad \alpha\, u + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_R.$$

(3) Transformationsmethoden – Überblick. Ziel: Problemstellung in einen Transformationsraum übertragen, dort leichter lösen und Ansatz wieder in den Ortungsraum zurückführen.

(3.1) Fourier- und Laplace-Transformationen.

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ikx}\, dx, \qquad \mathcal{L}\{u(x,t)\}(s) = \int_{0}^{\infty} u(x,t)\, e^{-st}\, dt.$$

Anwendung: zeitliche Transformation (Laplace) bei PDEs mit Zeitabhängigkeit, räumliche Transformation (Fourier) bei unendlichen oder periodischen Räumen.

(3.2) Sine/Cosine-/Transformationsarten auf halboffenen/intervallartigen Gebieten. Für Probleme auf $x \in (0, \infty)$ mit Randbedingungen am $x = 0$ eignen sich speziell die

- Fourier-Sinus-Transformation (Dirichlet am Rand),
- Fourier-Cosine-Transformation (Neumann am Rand),

bzw. deren gemischte Varianten bzw. die passende Trigonometrie-Expansion bei endlichen Intervallen.

(4) Umsetzung im Transformationsraum – Grundsatz. - Wähle den geeigneten Transformationsraum (z. B. Sinus-Transform auf $(0, \infty)$ bei Dirichlet am Rand).
- Transformiere die PDE und die Randbedingungen in diesen Raum.
- Löse die resultierende Gleichung im Transformationsraum (oft eine einfache ODE oder Algebra).
- Invertiere die Transformation, um die Lösung in der Ursprungsdarstellung zu erhalten.
- Berücksichtige ggf. Randdaten, die in den Transformationsschritten auftreten.

(5) Beispiel: Wärmeleitung auf dem Halbraum $x > 0$. Betrachte die eindimensionale Gleichung

$$u_t(x,t) = \alpha\, u_{xx}(x,t), \quad x > 0,\ t > 0,$$

mit Dirichlet-Rand $u(0,t) = 0$ und Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ ($f(x)$ gut definiert und zufriedenstellend integrierbar).

(5.1) Sine-Transform. Die passende Transformation ist die Fourier-Sinus-Transformation:

$$U_s(k,t) = \int_0^\infty u(x,t)\,\sin(kx)\,dx, \quad k > 0.$$

(5.2) Transformierte Gleichung. Unter der Randbedingung $u(0,t) = 0$ gilt

$$\frac{\partial U_s}{\partial t}(k,t) \;=\; -\alpha\, k^2\, U_s(k,t).$$

(5.3) Lösung im Transformationsraum. mit Anfangswert $U_s(k,0) = \int_0^\infty f(x)\,\sin(kx)\,dx$:

$$U_s(k,t) = e^{-\alpha k^2 t}\, U_s(k,0).$$

(5.4) Inverse Transformation. Die Lösung erhält man durch Inversion der Sinustransformation:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k^2 t}\, U_s(k,0)\,\sin(kx)\,dk \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k^2 t}\left(\int_0^\infty f(\xi)\,\sin(k\xi)\,d\xi\right)\sin(kx)\,dk.$$

(6) Randbedingungen in Transformationsraum – kurzer Überblick. - Dirichlet am Rand (z. B. $u(0,t) = 0$) führt typischerweise zu sauberer Transformationsform mit keinen zusätzlichen Rand-Terms.
- Neumann am Rand ($u_x(0,t) = g_N(t)$) bzw. Robin ($\alpha u + \beta u_x = g_R$) erzeugen im Transformierten zusätzliche Randterm-Groessen; man integriert diese als bekannte Randdaten in die Gleichung ein oder verwendet erweiterte Transformationsformen.
- In allen Fällen hilft die Struktur der Randbedingungen, die transformierte Gleichung exakt oder teilweise zu entkoppeln.

(7) Hinweise zur Praxis. - Wähle Transformationsformen, die die Randbedingungen vereinfachen.
- Achte auf Konvergenz- und Randannahmen (Decays, Homogenisation der Randwerte).
- Bei unvollständigen Randdaten können Transformationsmethoden eine integrierte Berücksichtigung erfordern.

(8) Kurzfassung. - Randwertprobleme klassifizieren in Dirichlet, Neumann, Robin.
- Transformationsmethoden verschieben das Problem in einen Raum, in dem oft Trennung oder Superposition leichter gelingt.
- Randbedingungen transformieren zu Bedingungen auf den transformierten Größen; Rücktransformation liefert die Lösung im ursprünglichen Raum.