

Lernzettel

Spezielle Typen gewöhnlicher
Differentialgleichungen in der Elektrotechnik:
Sturm-Liouville-Probleme, Bessel- und
Legendre-DGLs

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für
Ingenieurwissenschaften

Lernzettel: Spezielle Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Elektrotechnik**(1) Sturm-Liouville-Probleme.**

Ein Sturm-Liouville-Problem hat die Form

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x) y = \lambda w(x) y, \quad a < x < b,$$

mit geeigneten Randbedingungen. Der Operator

$$L[y] = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x) y$$

ist selbstadjungiert mit dem Gewicht $w(x)$. Daraus folgen reale Eigenwerte λ_n und orthogonale Eigenfunktionen y_n bezüglich

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) w(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

(2) Standardform und Grenzbedingungen.

Wähle Randbedingungen der Form

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 p(a) y'(a) = 0, \quad \alpha_1 y(b) + \beta_1 p(b) y'(b) = 0,$$

damit das Spektrum diskret bleibt. Der Operator ist dann formal selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2([a, b], w)$.

(3) Bessel-DGL.

Die zweiseitig standardisierte Bessel-Gleichung lautet

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Lösungen sind die Bessel-Funktionen $J_\nu(x)$ und $Y_\nu(x)$. Für $x \rightarrow 0$ ist $J_\nu(x)$ regulär; $Y_\nu(x)$ besitzt eine Singularität bei $x = 0$. Im elektromagnetischen Kontext ergeben sich radiale Lösungen in Zylinderkoordinaten. Typische Randbedingungen führen zu Eigenwerten über Nullstellen von J_ν .

(4) Legendre-DGL.

Legendre-Gleichung

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \ell(\ell + 1) y = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Lösungen sind die Legendre-Funktionen $P_\ell(x)$ und $Q_\ell(x)$. Für ganzzahlige $\ell \geq 0$ erhält man die orthogonalen Polynome

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{mn}.$$

(5) Orthogonalität und Gewichte.

Für SL-Probleme gilt mit Gewicht $w(x)$:

$$\langle y_m, y_n \rangle_w = \int_a^b y_m(x) y_n(x) w(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Norm:

$$\|y_n\|_w = \left(\int_a^b |y_n(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}.$$

(6) Anwendungen in der Elektrotechnik.

- Modale Analyse von Leitungsstrukturen und Medien mit variierender Impedanz; Trennung der Variablen führt zu SL-Formeln.
- Bessel-Funktionen in Zylinderkoordinaten (z. B. radialer Anteil bei Drum- bzw. Rohrstrukturen).
- Legendre-Funktionen in kugelförmigen Geometrien (Feldverteilungen in Kugelhüllen, Strahlung, EM-Wellen).
- Verwendung von orthogonalen Funktionen zur Darstellung von Signalen in segmentierten Medien.

(7) Lösungsmethoden und Zusammenhänge.

- Bestimmung der Eigenwerte λ_n durch die Randbedingungen; - Normalisierung der Eigenfunktionen y_n mit Gewicht $w(x)$; - Ausnutzung der Eigenbasis zur Erweiterung von Funktionen:

$$f(x) \approx \sum_n a_n y_n(x), \quad a_n = \frac{1}{\|y_n\|_w^2} \int_a^b f(x) y_n(x) w(x) dx.$$

(8) Beispiel: Bessel-Eigenwertproblem auf $[0, R]$.

Sei

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0,$$

mit y regulär bei $x = 0$ und $y(R) = 0$. Die Lösung ist

$$y(x) = J_\nu(kx),$$

und die Randbedingung liefert

$$J_\nu(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = k_n,$$

woraus die Eigenfunktionen $y_n(x) = J_\nu(k_n x)$ entstehen.

(9) Beispiel: Legendre-System in der Praxis.

Auf dem Intervall $[-1, 1]$ liefern $P_\ell(x)$ eine orthogonale Familie mit

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn},$$

was sich gut zur Zerlegung von Funktionen in Kugelkoordinaten eignet (z. B. bei kugelförmigen Feldern in der Elektrotechnik).