Lernzettel

Reduktion der Maxwell-Gleichungen auf PDEs und deren Lösung mittels Transformationsmethoden

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Reduktion der Maxwell-Gleichungen auf PDEs und deren Lösung mittels Transformationsmethoden

(1) Maxwell-Gleichungen in Differentialform.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

(Zusatz)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

(2) Reduktion auf PDEs. Aus Faradays Gesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

und der Beziehung $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ folgt durch Ausnutzung der Rotationsgleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}).$$

Unter Substitution von $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ sowie $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ergibt sich, in einer Region mit konstanter ε und μ sowie ggf. endlicher Leitfähigkeit σ:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \;+\; \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

(3) Randbedingungen und Spezialfälle. - Im raumgroßen, freien Medium (kein Freistrahl $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$) mit $\sigma = 0$ gilt:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

- Allgemein: die oben genannte Gleichung ist eine gekoppelten, diel. Welle mit Dämpfung (durch σ).

(4) Transformationsmethoden: Fourier- und Laplace-Transformation. - Fourier-Transformation in Raumrichtung (1D-Beispiel):

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \quad \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk.$$

- Laplace-Transformation in Zeit:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds.$$

Anwendung auf die 1D-Dämpfungs-Welle: Aus

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

folgt nach Fourier in x ($\hat{E}(k,t)$) und Laplace in t ($\hat{E}(k,s)$):

$$-k^2\hat{E}(k,s) = \mu\varepsilon\big(s^2\hat{E} - s\hat{E}_0(k) - \hat{E}_1(k)\big) + \mu\sigma\big(s\hat{E} - \hat{E}_0(k)\big).$$

Damit

$$\big(\mu\varepsilon s^2 + \mu\sigma s + k^2\big)\hat{E}(k,s) = \mu\varepsilon\big(s\,\hat{E}_0(k) + \hat{E}_1(k)\big) + \mu\sigma\,\hat{E}_0(k).$$

$$\hat{E}(k,s) = \frac{\mu\varepsilon\big(s\,\hat{E}_0(k) + \hat{E}_1(k)\big) + \mu\sigma\,\hat{E}_0(k)}{\mu\varepsilon s^2 + \mu\sigma s + k^2}.$$

Nach der inversen Transformation erhält man $E(x,t)$.

(5) Dispersionsbezüge und charakteristische Lösungen. - Für harmonische Zeitentwicklung $E(x,t) = \tilde{E}(x)\,e^{-i\omega t}$ führt das zu

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} + \Big(\omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma\Big)\,\tilde{E} = 0.$$

- Die komplexe Wellenzahl ist

$$k^2 \;=\; \mu\varepsilon\omega^2 \;-\; i\,\mu\sigma\omega.$$

Für $\sigma = 0$ erhält man die Verlustfreiheit $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$; bei $\sigma > 0$ existiert eine Dämpfung (Abklingverhalten).

(6) Beispiele und Interpretationen. - Planewelle in einem lossless Medium ($\sigma = 0$):

$$E(x,t) = E_0\,\cos\big(\omega t - kx\big), \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$$

- Planewelle in einem leitenden Medium ($\sigma > 0$):

$$k = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - i\,\mu\sigma\omega} \quad \Rightarrow \quad E(x,t) \sim e^{-\Im(k)\,x}\cos\big(\omega t - \Re(k)\,x\big).$$

(7) Vorgehensweise bei Problemstellungen. - Schritt 1: Maxwell-Gleichungen auf PDEs reduzieren unter gegebenen Annahmen. - Schritt 2: Transformationsmethode auswählen (Zeit transformieren via Laplace, Raum transformieren via Fourier). - Schritt 3: Rand- bzw. Anfangsbedingungen übertragen und im Transformraum lösen. - Schritt 4: Rücktransformation durchführen (Inverse Transformationsformeln). - Schritt 5: Physikalische Interpretation der Lösungen, z. B. Wellenlänge, Dämpfung, Grenzwerte.

Zusammenfassung. Transformationsmethoden liefern eine effektive Strategie, um komplexe PDEs, die aus Maxwell-Gleichungen hervorgehen, in algebraische oder einfachereODEs zu überführen. Durch geeignete Kombination von Fourier- und Laplace-Transformationen lassen sich Zwangsbedingungen, Anfangswerte und Materialparameter systematisch berücksichtigen und Lösungen in geschlossener oder transformierter Form erhalten.