Lernzettel

Grundlagen linearer Gleichungssysteme in der Mechanik

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mechanik E
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Grundlagen linearer Gleichungssysteme in der Mechanik

(1) Systemnotation. Lineare Gleichungssysteme der Form

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

lassen sich in der Mechanik zur Beschreibung von Kräften/Momenten verwenden. Die Vektoren $\mathbf{x}$ enthalten die gesuchten Unbekannten (z. B. Reaktionskräfte), $\mathbf{b}$ die bekannten Kräfte bzw. Momenten.

(2) Matrizennotation und Inverse. Für ein quadratisches, invertierbares Matrix-System gilt

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

In der Mechanik wird oft die Lösung durch Inversion oder durch Eliminationsverfahren gefunden.

(3) Lösungsmethoden.

$$\text{Gaußsche Eliminierung:} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & b_m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{array}\right].$$

Reihenweis transformieren die linke Matrix in eine obere Dreiecksform; dann rekursive Rücksubstitution liefert $\mathbf{x}$.

(4) Beispiel 2×2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Determinante.

$$\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0.$$

Inverse von A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvektor.

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Komponenten der Lösung.

$$x_1 = \frac{9}{5} = 1.8, \qquad x_2 = \frac{7}{5} = 1.4.$$

(5) Mechanische Anwendung: System A x = b aus Gleichgewichten. In der Statik und Kinematik entstehen häufig Gleichungssysteme der Form

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

wobei $\mathbf{x}$ die unbekannten Reaktionskräfte bzw. Schnittlasten darstellt. Die Matrix A enthält die Koeffizienten aus den Gleichgewichtsbedingungen.

Beispiel aus der Statik. Für zwei Stützkraftkomponenten R_1, R_2 in einem Balken ergeben sich aus Gleichgewichtsbedingungen

$$R_1 + R_2 = F, \qquad d_1 R_1 + d_2 R_2 = M,$$

dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}.$$

Hinweis zur Lösbarkeit. Das System ist eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ ist. Allgemein gilt: das lineare Gleichungssystem besitzt eine Lösung, wenn der Rang von A gleich dem Rang des erweiterten Matrizens $[A|\mathbf{b}]$ ist; eindeutig eindeutig lösbar ist es, wenn $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|\mathbf{b}]) = n$ (n = Anzahl der Unbekannten).