Lernzettel

Vektorrechnung: Kräfte, Momente und Richtungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mechanik E
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Vektorrechnung: Kräfte, Momente und Richtungen

(1) Vektorgrundlagen. Ein Vektor beschreibt eine Größe mit Betrag und Richtung. In drei Dimensionen schreibt man ihn oft als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Der Betrag ist

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v}$ ist

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \qquad |\hat{v}| = 1 .$$

Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta.$$

Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\hat{n}$ ist

$$\operatorname{proj}_{\hat{n}} \vec{a} = (\vec{a} \cdot \hat{n})\, \hat{n}.$$

(2) Kräfte als Vektoren. Kräfte wirken als Vektoren:

$$\vec{F} = F_x\, \hat{\imath} + F_y\, \hat{\jmath} + F_z\, \hat{k} \quad \text{(3D)},$$

bzw. in der Ebene

$$\vec{F} = F_x\, \hat{\imath} + F_y\, \hat{\jmath}.$$

Die Richtung einer Kraft ist durch ihre Koordinaten bestimmt.

(3) Richtungen und Richtungscosinus. Für einen Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

mit $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ und α, β, γ den Winkeln zur Koordinatenachsen.

(4) Drehmoment (Moment). Das Moment eines Kraftvektors $\vec{F}$ bezüglich des Ortes $\vec{r}$ ist

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

In Komponentenform (3D):

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{pmatrix}.$$

Für das Momentenmaß in der Ebene (2D) genügt die z-Komponente:

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x.$$

(5) Rechenregeln: Beispiele. Beispiel 1 – Kraftvektor in der Ebene:

$$\vec{F} = F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath}.$$

Beispiel 2 – Momentenkalkulation in 3D: Gegeben $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ und $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$.

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} r_yF_z - r_zF_y \\ r_zF_x - r_xF_z \\ r_xF_y - r_yF_x \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3 – 2D-Moment:

$$M_z = r_xF_y - r_yF_x.$$

(6) Gleichgewicht in der Statik. Für ein starreres System gilt das Gleichgewicht von Kräften und Momenten:

$$\sum_k \vec{F}_k = \vec{0}, \qquad \sum_k \vec{M}_k = \vec{0}.$$

In der Ebene reduziert sich dies auf die drei Gleichungen

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0.$$

(7) Anwendungen und Hinweise. - Freikörperdiagramm erstellen, Kräfte als Vektoren zeichnen. - Richtungen durch Projektionen oder durch Berechnung der Komponenten klären. - Das Vorzeichen des Moments kennzeichnet die Drehrichtung (positiv gegen den Uhrzeigersinn, negativ im Uhrzeigersinn). - Zerlegung komplexer Kraftvektoren in Koordinatenkomponenten erleichtert die Gleichgewichtsbetrachtung.

(8) Beispielrechnungen (Kurz). Beispiel A – Zwei Kräfte wirken an einem Punkt in der Ebene:

$$\vec{F}_1 = (3,\ 4)\ \mathrm{N}, \quad \vec{F}_2 = (-2,\ 1)\ \mathrm{N}.$$

Summenvektor:

$$\vec{F}_{\mathrm{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (3-2,\ 4+1) = (1,\ 5)\ \mathrm{N}.$$

Beispiel B – Moment eines Kraftpaares um den Ursprung:

$$\vec{r}_1 = (0.5, 0)\ \mathrm{m}, \quad \vec{F}_1 = (0, -10)\ \mathrm{N}, \vec{r}_2 = (0, 0.2)\ \mathrm{m}, \quad \vec{F}_2 = (5, 0)\ \mathrm{N}.$$

$$\begin{aligned} M_{1z} &= r_{1x}F_{1y} - r_{1y}F_{1x} = 0.5\cdot(-10) - 0\cdot 0 = -5\ \mathrm{N\ m}, \\ M_{2z} &= r_{2x}F_{2y} - r_{2y}F_{2x} = 0\cdot 0 - 0.2\cdot 5 = -1\ \mathrm{N\ m}, \\ M_{z,\mathrm{gesamt}} &= M_{1z} + M_{2z} = -6\ \mathrm{N\ m}. \end{aligned}$$