

Lernzettel

Momentanpol als Beschreibungsgröße der Bewegung starrer Körper

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mechanik E
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Mechanik E

Lernzettel: Momentanpol als Beschreibungsgröße der Bewegung starrer Körper

(1) Grundidee. Für eine bewegte, starre Scheibe bzw. einen starren Körper in einer Ebene existiert zu jedem Zeitpunkt ein Punkt M in der Ebene, dessen Geschwindigkeit gleich null ist. Dieser Punkt heißt Momentanpol oder Instantaneous Center (IC) der Bewegung. Die Bewegung des Körpers lässt sich im Zeitpunkt t als Rotation um M mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ω auffassen.

(2) Grundgleichung der Planbewegung. Für jeden Punkt P des starren Körpers gilt

$$\mathbf{v}_P = \omega \times \mathbf{r}_{P/M},$$

wobei $\omega = \omega \hat{\mathbf{z}}$ der eindimensionale Drehachsen-Vektor (senkrecht zur Bewegungsbahn) ist und $\mathbf{r}_{P/M}$ der Ortsvektor von M nach P.

(3) Beträge und Richtungen. Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors eines Punktes P ergibt sich zu

$$|\mathbf{v}_P| = \omega d_{P/M},$$

wobei

$$d_{P/M} = \|\mathbf{r}_{P/M}\|$$

der Abstand von P zum Momentanpol M ist.

(4) Geometrische Interpretation der Geschwindigkeit. - Die Geschwindigkeit eines Punktes P ist senkrecht zum Radiusvektor $\mathbf{r}_{P/M}$. - Die Richtung der Geschwindigkeit folgt dem Recht-Hand-Regel-Verfahren um M. - Punkte mit gleichem Abstand zu M haben proportional gleiche Geschwindigkeiten; der Mittelpunkt M dient als Rotationszentrum.

(5) Bestimmung des Momentanpols aus Geschwindigkeiten von zwei Punkten. Sei $\mathbf{v}_A$ der Geschwindigkeitsvektor von Punkt A und $\mathbf{v}_B$ der von Punkt B. Der Momentanpol M liegt an den Geraden durch A bzw. B, deren Richtungen senkrecht zu $\mathbf{v}_A$ bzw. $\mathbf{v}_B$ verlaufen. Die Gleichungen für M lauten:

$$\mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{A}) = 0, \quad \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{B}) = 0.$$

(6) Lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von M. Schreibt man $\mathbf{M} = (x, y)^T$, $\mathbf{A} = (x_A, y_A)^T$, $\mathbf{B} = (x_B, y_B)^T$ und $\mathbf{v}_A = (v_{Ax}, v_{Ay})^T$, $\mathbf{v}_B = (v_{Bx}, v_{By})^T$, erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} v_{Ax}(x - x_A) + v_{Ay}(y - y_A) = 0, \\ v_{Bx}(x - x_B) + v_{By}(y - y_B) = 0. \end{cases}$$

Dieses System löst man, falls $\det \begin{pmatrix} v_{Ax} & v_{Ay} \\ v_{Bx} & v_{By} \end{pmatrix} \neq 0$. Dann ist der Momentanpol eindeutig bestimmt. Andernfalls handelt es sich um reine Translation (M liegt im Prinzip im Unendlichen).

(7) Beispiel (kleiner Rechenweg). Gegeben seien zwei Punkte A und B mit Ortsvektoren $\mathbf{A} = (0, 0)$ bzw. $\mathbf{B} = (2, 0)$ und Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A = (1, 0)$, $\mathbf{v}_B = (0, 1)$.

- Aus $\mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{A}) = 0$ folgt

$$1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

- Aus $\mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{B}) = 0$ folgt

$$0 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

- Es ergibt sich $\mathbf{M} = (0, 0)$. Damit rotiert der Körper um M mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Die Geschwindigkeit von B beträgt $|\mathbf{v}_B| = 1$ und der Abstand von B zu M ist $d_{B/M} = 2$. Also

$$\omega = \frac{|\mathbf{v}_B|}{d_{B/M}} = \frac{1}{2}.$$

(8) Besonderheiten und Grenzen. - Wenn $\omega = 0$, dann handelt es sich um reine Translation; der Momentanpol liegt "im Unendlichen". - Für generalisierte Raumbewegungen (3D) ist der Momentanpol in der Ebene nicht eindeutig als einzelner Punkt definiert; hier spricht man eher von einem Instantaneous Axis of Rotation (IAR) oder von einer Rotationskomponente.

(9) Fazit. Der Momentanpol dient zur Beschreibung der aktuellen Bewegung eines starren Körpers in einer Ebene als reine Rotation um einen Punkt. Er erleichtert die Bestimmung von Geschwindigkeiten einzelner Punkte durch die einfache geometrische Relation zum Abstandsvektor rechtwinklig zur Geschwindigkeitsrichtung.