Lernzettel

Elastostatik: Verzerrungen, Spannungen und das Hooke'sche Gesetz

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Mechanik E
Erstellungsdatum:	September 20, 2025

Lernzettel: Elastostatik: Verzerrungen, Spannungen und das Hooke'sche Gesetz

(1) Grundbegriffe und Annahmen. In der Elastostatik betrachten wir lineare Verformungen kleiner Verzerrungen unter der Annahme, dass Materialpunkte sich gering verschieben und die Materialgesetze linear gelten. Es werden die Begriffe Verzerrung (Dehnung) und Spannung (Normale und Schubspannung) verwendet. Ziel ist der Zusammenhang zwischen äußeren Lasten, Verformungen und inneren Kräften herzustellen.

(2) Verzerrung (Dehnung). Der kleine Verzerrungstensor ε_{ij} beschreibt die lokale Dehnung und Scherung eines Materials:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

wobei $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ der Verschiebungsvektor ist. ε_{ij} besitzt die Eigenschaft $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Zusammenhang mit Längenänderungen entlang der Achsen:

$$\varepsilon_{xx} \approx \frac{\Delta L_x}{L_x}, \quad \varepsilon_{yy} \approx \frac{\Delta L_y}{L_y}, \quad \varepsilon_{zz} \approx \frac{\Delta L_z}{L_z}.$$

(3) Spannung. Der Cauchy-Spannungs-Tensor σ_{ij} beschreibt Kräfte pro Flächeneinheit in der jeweiligen Richtung:

$$\sigma_{ij} \quad (i, j \in \{x, y, z\}).$$

(4) Hooke'sches Gesetz (Isotrop). Für ein isotropes, lineares Material gilt das Hooke'sche Gesetz in Tensorform:

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\mu\,\varepsilon_{ij},$$

wobei λ und μ die Lamé-Konstanten sind und δ_{ij} der Kronecker-Delta ist.

Zentrale Materialparameter:

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{(Schubmodul)},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{(Lamé-Konstante)},$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad \text{(Spannungsdehnungsumme)}.$$

(5) Zusammenhang zwischen Dehnung, Spannung und Materialspannung (1D-Achslast). Bei rein axialer Zug- bzw. Druckbelastung eines Stabs mit Querschnittsfläche A gilt:

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

(6) Zusammenhang zwischen Spannung, Dehnung und Materialkennwerten. Durch das Hooke'sche Gesetz gilt in 1D:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{AE}.$$

Durch Einsetzen in die Längenänderung erhält man die Dehnung des Stabs:

$$\Delta L = \varepsilon\, L = \frac{F\, L}{A\, E}.$$

(7) Biegung und Flächenträgheitsmoment. Bei Biegebeanspruchung ergibt sich eine Schub- bzw. Normalspannung mit:

$$\sigma = \frac{M\, y}{I},$$

wobei M das Biegemoment, y der senkrechte Abstand zur Mittelachse und I das Flächenträgheitsmoment ist. Je nach Seite der Fläche kann das Vorzeichen variieren:

$$\sigma = -\frac{M\, y}{I} \quad \text{(Sign convention).}$$

Für typische Querschnitte gilt:

$$I_{\text{Rechteck}} = \frac{b\, h^3}{12},$$
$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

(8) Kleine Zusammenfassung – zentrale Formeln zum Merken. - Verzerrungstensor:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

- Spannungstensor (Isotrop):

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}.$$

- 1D-Zugspannung und Dehnung:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{F}{AE}, \quad \Delta L = \frac{FL}{AE}.$$

- Biegung:

$$\sigma = \frac{My}{I}.$$