

Lernzettel

Flächenträgheitsmoment und Biegelinien

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mechanik E
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Mechanik E

Lernzettel: Flächenträgheitsmoment und Biegelinien

(1) Definition und Notation. Das Flächenträgheitsmoment (Flächenmoment) beschreibt die Verteilung der Querschnittsfläche gegenüber einer Achse und gibt Auskunft über die Widerstandsfähigkeit gegen Biegung um diese Achse. Die wichtigsten Größen sind

$$I_x = \iint_A y^2 dA, \quad I_y = \iint_A x^2 dA,$$
$$J = I_x + I_y \quad (\text{polar, um die z-Achse}).$$

Die Achsen werden meist durch den Schwerpunkt des Querschnitts gelegt. Für eine Achse durch den Schwerpunkt gelten dann die sogenannten centroidal axes.

(2) Gemeinsame Formeln für häufige Formquerschnitte. Rechteck (Breite b in x-Richtung, Höhe h in y-Richtung):

$$I_x^{(c)} = \frac{b h^3}{12}, \quad I_y^{(c)} = \frac{h b^3}{12}, \quad J^{(c)} = I_x^{(c)} + I_y^{(c)}.$$

Kreis (Radius R):

$$I_x^{(c)} = I_y^{(c)} = \frac{\pi R^4}{4}, \quad J^{(c)} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

(3) Parallelachsen-Theorem. Wird der Achse parallel zu einer Achse durch den Schwerpunkt verschoben, gilt

$$I = I_c + A d^2,$$

wobei I das Trägheitsmoment um die neue Achse, I_c das Trägheitsmoment um die centroidale Achse, A die Querschnittsfläche und d der Abstand zwischen den Achsen ist.

(4) Biegelinien – Grundidee. Die Biegelinie beschreibt den Verformungsverlauf eines Balkens unter Last. Die Krümmung κ des Balkens hängt eng mit dem Biegemoment $M(x)$ und dem Flächenträgheitsmoment I zusammen:

$$\kappa \approx \frac{d^2 w}{dx^2} \approx \frac{M(x)}{E I},$$

wobei $w(x)$ die Durchbiegung, E das Elastizitätsmodul des Materials und I das Trägheitsmoment des Querschnitts ist. Integriert man zweimal, erhält man $w(x)$ bis auf Integrationskonstanten, die durch Randbedingungen (Auflagerungen) bestimmt werden.

Schritte zur Berechnung der Biegelinie: - Bestimme $M(x)$ aus den äußeren Lasten und den Randbedingungen. - Löse $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{E I}$ durch zweimaliges Integrieren. - Bestimme die Integrationskonstanten mittels Randbedingungen (z.B. $w(0) = 0$, $w(L) = 0$ bei einfach getragenen Balken).

(5) Verbindung zwischen Biegelinie und Biegespannung. Die Biegespannung im äußeren Faserbereich der Platte oder des Balkens ist

$$\sigma = \frac{M(x) c}{I},$$

wobei c der Abstand von der neutralen Achse zur äußeren Faser ist. Für einen Rechteckquerschnitt ist $c = h/2$ (oberste bzw. unterste Faser).

(6) Beispiel: Zentrallast auf einem einfach gestützten Balken. Gegeben sei ein Balken der Länge L mit einem zentralen Punktlast P . Die Biegemomente entlang des Balkens sind

$$M(x) = \begin{cases} \frac{P}{2}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{P}{2}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Die Durchbiegung erfüllt

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}.$$

Aus der Integration erhält man die Form der Biegelinie. Die maximale Durchbiegung (bei $x = \frac{L}{2}$) ist bekannt:

$$w_{\max} = \frac{P L^3}{48 E I}.$$

(7) Beispielrechnung (Querschnitt und Werte). Wähle einen Rechteckquerschnitt mit Breite $b = 0.05$ m und Höhe $h = 0.10$ m (also $I_x^{(c)} = \frac{bh^3}{12} = 4.17 \times 10^{-6} \text{ m}^4$). Material: Stahl mit $E = 210 \times 10^9$ Pa. Balkenlänge: $L = 4$ m. Zentrale Last: $P = 8,0 \text{ kN} = 8000 \text{ N}$.

Berechne das Trägheitsmoment um die centroidale x-Achse:

$$I = I_x^{(c)} = 4.17 \times 10^{-6} \text{ m}^4.$$

Durchbiegung am Mittelpunkt (Annahme eines einfach getragenen Balkens mit Mittelpunktlast) ergibt:

$$w_{\max} = \frac{P L^3}{48 E I} = \frac{8000 \cdot 4^3}{48 \cdot 210 \times 10^9 \cdot 4.17 \times 10^{-6}} \approx 0.012 \text{ m}$$

also ca. 12 mm Durchbiegung.

(8) Kurzüberblick – Relevante Formeln. - Flächenträgheitsmomente (über centroidale Achsen):

$$I_x = \iint_A y^2 dA, \quad I_y = \iint_A x^2 dA, \quad J = I_x + I_y.$$

- Rechteckquerschnitt:

$$I_x^{(c)} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y^{(c)} = \frac{hb^3}{12}, \quad J^{(c)} = I_x^{(c)} + I_y^{(c)}.$$

- Kreisquerschnitt:

$$I_x^{(c)} = I_y^{(c)} = \frac{\pi R^4}{4}, \quad J^{(c)} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

- Parallelachsen-Theorem:

$$I = I_c + A d^2.$$

- Biegelinie (Grundrelation):

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}.$$

- Biegespannung:

$$\sigma = \frac{M c}{I}.$$