

# Lernzettel

Festigkeitslehre: Biegung und Dehnung von  
Stäben, statisch unbestimmte Systeme

|                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| <b>Universität:</b>      | Technische Universität Berlin |
| <b>Kurs/Modul:</b>       | Mechanik E                    |
| <b>Erstellungsdatum:</b> | September 20, 2025            |



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!  
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Mechanik E

**Lernzettel: Mechanik E****(1) Festigkeitslehre: Biegung und Dehnung von Stäben**

Die Biegung eines Stabes führt zu Verdrehung und Verzerrung der Querschnittsbene.

$$\kappa(x) = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$M(x) = E I \kappa(x) = E I \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E I}$$

$$\sigma(x, y) = - \frac{M(x) y}{I}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

mit

$$I = \frac{b h^3}{12} \quad c = \frac{h}{2}$$

Für Rechteck-Querschnitte gilt die obige Form für  $I$  und  $c$ .

**(2) Biegelinie und Behandlung der Dehnung**

Der Zusammenhang zwischen Durchbiegung, Krümmung und Moment lautet:

$$M(x) = E I \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$v''''(x) = \frac{q(x)}{E I}$$

Bei reinem Biegungeffekt (kein Querschnittsschnappen) entspricht die Krümmung  $\kappa$  der zweiten Ableitung der Durchbiegung.

**(3) Statische Bestimmtheit vs. statische Unbestimmtheit**

Grad der Statisch Unbestimmtheit (in der Ebene) sei:

$$r = R - 3$$

wobei -  $R$  Anzahl der unbekannten Reaktionen (vertikal/horizontal, ggf. Momenten) - 3 Gleichgewichtsreaktionen (Summe  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $\sum M = 0$ )

Man unterscheidet: - Statisch bestimmt:  $r = 0$  - Statisch unbestimmt:  $r > 0$

**(4) Vorgehen bei statisch unbestimmten Systemen**

Allgemeine Schritte: - Redundanz  $R$  auswählen (eine Reaktion als Redundanz festlegen). - Teilsysteme bilden: Trenne die Struktur, entferne die Redundanz. - Berechne die Momentenverläufe:

$M_1(x)$  – Momentenverlauf aufgrund der realen Lasten mit  $R = 0$

$M_R(x)$  – Momentenverlauf aufgrund einer Einheitslast am Redundanzpunkt

- Castigliano's Theorem (einflussfaktorisch):

$$U(R) = \int_0^L \frac{M(x; R)^2}{2 E I} dx$$

$$\delta(R) = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{E I} \int_0^L M(x; R) \frac{\partial M(x; R)}{\partial R} dx$$

- Da  $M(x; R) = M_1(x) + R M_R(x)$  folgt:

$$\delta(R) = \frac{1}{E I} \left[ \int_0^L M_1(x) M_R(x) dx + R \int_0^L M_R(x)^2 dx \right]$$

- Kompatibilität erzwingen ( $\delta(R) = 0$ ) und nach  $R$  lösen:

$$R = - \frac{\int_0^L M_1(x) M_R(x) dx}{\int_0^L M_R(x)^2 dx}$$

Hinweis: Bei der Berechnung hat sich das divisorische  $E I$  herauskürzt.

### (5) Beispiel: Einfach unterstützter Balken mit zusätzlicher Stütze (Skizze)

- Gegeben: Balken der Länge  $L$  mit einer zusätzlichen Stütze an der Lage  $x = a$  (Statisch unbestimmt 1. Grades).
- Vorgehen: Wähle die Redundanz als vertikale Reaktion an der zusätzlichen Stütze. Berechne  $M_1(x)$  aus der äußeren Lastverteilung ohne die zusätzliche Stütze (reduziertes System). Berechne  $M_R(x)$  für eine Einheitslast am Redundanzort. Verwende die obige Formel, um  $R$  zu bestimmen, dann Gesamtmomentenverlauf  $M(x) = M_1(x) + R M_R(x)$  und schließlich  $\sigma_{\max} = M_{\max} c / I$ .

Hinweis: Für eine vollständige numerische Lösung sind die konkreten Lasten und Abmessungen nötig.

### (6) Beispiel zur Biegelinien-Vereinfachung

Für einen reinen Balken unter verteilter Last  $q(x)$  gilt:

$$E I v''''(x) = q(x)$$

Durch Integration erhält man  $v(x)$  bis zu Integrationskonstanten, die durch Randbedingungen bestimmt werden (Lagerung, Auflagerungen).

### (7) Typische Querschnitte und Formeln

- Rechteckquerschnitt:  $I = \frac{b h^3}{12}$ ,  $c = \frac{h}{2}$
- Kreisquerschnitt:  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ ,  $c = \frac{d}{2}$

### (8) Zusammenfassung wichtiger Beziehungen

- Biegung:  $\kappa = M / (E I)$  bzw.  $M = E I \kappa$
- Durchbiegung:  $v''(x) = M(x) / (E I)$
- Spannung durch Biegung:  $\sigma = -M y / I$
- Maximale Biegespannung:  $\sigma_{\max} = M_{\max} c / I$
- Gleichgewichte:  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M = 0$  (in der Ebene)

- Statische Unbestimmtheit:  $r = R - 3$  (bei planarer Geometrie)
- Castigliano für Redundanzen:  $R = -\frac{\int M_1 M_R dx}{\int M_R^2 dx}$

### **Hinweis zur Aufgabenlösung**

- Verwende klare Trennung von Lastfällen und Randbedingungen.
- Bringe jeden Ausdruck sauber in separaten Gleichungen untereinander.
- Achte darauf, dass alle Formeln in Display-Umgebungen stehen und nicht nebeneinander erscheinen.