

# Lernzettel

Kombinatorische Logik: Gatternetze,  
Wahrheitstabellen und Minimierung

|                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| <b>Universität:</b>      | Technische Universität Berlin |
| <b>Kurs/Modul:</b>       | Rechnerorganisation           |
| <b>Erstellungsdatum:</b> | September 20, 2025            |



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!  
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Rechnerorganisation

**Lernzettel: Kombinatorische Logik: Gatternetze, Wahrheitstabellen und Minimierung****(1) Grundbegriffe der Booleschen Logik.**

Boolesche Werte sind 0 und 1. Die Grundoperatoren sind:  $A \wedge B$  (UND),  $A \vee B$  (ODER) und  $\neg A$  (NOT).

**Identitäten und Regeln.**

$$\text{Identität: } A \vee 0 = A, \quad A \wedge 1 = A$$

$$\text{Null: } A \vee 1 = 1, \quad A \wedge 0 = 0$$

$$\text{Komplement: } A \vee \neg A = 1, \quad A \wedge \neg A = 0$$

$$\text{Doppelnegation: } \neg(\neg A) = A$$

$$\text{De Morgan: } \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

**(2) Gatternetze (kombinatorische Logik).**

Ein Gatternetz besteht aus Gattern, die Eingänge verarbeiten und Outputs liefern. Es enthält keine Speicherelemente; der Ausgang hängt nur von den aktuellen Eingängen ab. Typische Bausteine sind:

- AND-Gatter:  $A \wedge B$
- OR-Gatter:  $A \vee B$
- NOT-Gatter:  $\neg A$

Weitere Bausteine: NAND ( $\neg(A \wedge B)$ ), NOR ( $\neg(A \vee B)$ ), XOR ( $A \oplus B$ ) und XNOR.

**(3) Wahrheitstabellen.**

Beispiele für zwei Eingänge A, B:

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 0            |
| 1 | 0 | 0            |
| 1 | 1 | 1            |

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 1 | 1 | 1          |

| A | B | $A \oplus B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 1            |
| 1 | 0 | 1            |
| 1 | 1 | 0            |

NAND- und NOR-Tabellen ergeben sich als Verneinung der obigen Tabellen:

$$A \uparrow B = \neg(A \wedge B), \quad A \downarrow B = \neg(A \vee B).$$

**(4) Minimierungstechniken.**

Ziel ist die Vereinfachung der logischen Funktion durch weniger Gatter.

Wichtige Gesetze (Auszug):

$$\begin{aligned}A \vee 0 &= A, & A \wedge 1 &= A, \\A \vee 1 &= 1, & A \wedge 0 &= 0, \\A \vee \neg A &= 1, & A \wedge \neg A &= 0, \\A \vee (A \wedge B) &= A, & A \wedge (A \vee B) &= A, \\ \neg(A \wedge B) &= \neg A \vee \neg B, & \neg(A \vee B) &= \neg A \wedge \neg B, \\A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C).\end{aligned}$$

Eine häufige Methode ist die Karnaugh-Karten-Minimierung (K-Karte) für 2–3 Variablen.

Beispiel (3 Variablen): Minimalform aus den Mintermen  $f(A, B, C) = \Sigma m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$ .

Eine mögliche minimale Summe der Produkte ist:

$$f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B} + AB + AC.$$

**(5) Beispiel-Gatternetz zur Minimierung.**

Für  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B} + AB + AC$  ergibt sich z.B. ein Aufbau:

- NOT-Gatter:  $\bar{A}, \bar{B}$
- AND-Gatter 1:  $\bar{A} \wedge \bar{B}$  (t1)
- AND-Gatter 2:  $A \wedge B$  (t2)
- AND-Gatter 3:  $A \wedge C$  (t3)
- OR-Gatter:  $t1 \vee t2 \vee t3$  (f)

Zur Umsetzung mit 2-Eingang-Gattern kann man das OR-Gatter in zwei Stufen realisieren (zwischen t2 und t3, dann mit t1 OR dem Zwischenergebnis).

**(6) Übungsaufgaben.**

- Aufgabe 1: Minimieren Sie die Funktion  $f(A, B, C) = \Sigma m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$  und geben Sie die minimale Summe der Produkte an.
- Aufgabe 2: Geben Sie ein Gatternetz-Beispiel für  $f(A, B, C) = (A \wedge B) \vee \neg C$  und formulieren Sie die entsprechenden Booleschen Ausdrücke.
- Aufgabe 3: Zeigen Sie, wie man  $f$  mit NAND-Gattern ausschreiben könnte und skizzieren Sie alternativ eine NOR-basierte Realisierung.
- Aufgabe 4: Skizzieren Sie eine einfache 2-Eingang-Karte (Karnaugh) für die drei Variablen und bestimmen Sie die Minimierung.

**Hinweis zu Zielvorgaben.**

Schwierigkeitsgrad: Normal. Die Inhalte dienen der Orientierung innerhalb des Kurses „Rechnerorganisation“; Details bleiben je nach Lehrplan variabel. Die hier gezeigten Formulierungen dienen der Verdeutlichung von Gatternetzen, Wahrheitstabellen und Minimierung.