

Lernzettel

Rechnerarithmetik: Zahlendarstellungen, Fest-
und Gleitkomma, Mikroalgorithmen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Rechnerorganisation
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Rechnerorganisation

Lernzettel: Rechnerarithmetik**Schwerpunkt: Zahlendarstellungen, Fest- und Gleitkomma, Mikroalgorithmen****(1) Zahlendarstellungen**

Zahlendarstellungen in digitalen Systemen basieren auf einem Basis-System. Im Computer ist Basis 2. Es gibt unterschiedliche Kodierungen:

Unsigned (vorzeichenlose) Zahlen. Die Werte werden durch die Binärwerte direkt dargestellt.

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} b_k 2^k, \quad b_k \in \{0, 1\}.$$

Vorzeichenbehaftete Zahlen. Am häufigsten: Zweierkomplement (Two's complement). Die Werte lassen sich schreiben als

$$z = -b_{n-1} 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k 2^k, \quad b_k \in \{0, 1\}.$$

Beispiel: 8-Bit Zweierkomplement

$$-18_{10} \leftrightarrow 1110\ 1110_2 \quad (8 \text{ Bit}).$$

(2) Festkomma (Fixed-Point) und Gleitkomma (Floating-Point)

Festkomma. Ein Festkomma-Wert wird durch eine Ganzzahl X und eine Fraktionalstelle f festgelegt. Dann gilt

$$x = \frac{X}{2^f}.$$

Wahl des Formats: N Bits insgesamt, f Nachkommastellen. Beispiel: N=8, f=4 (Q4.4).

$$X = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{16} = 3.75.$$

$$X = -16 \Rightarrow x = \frac{-16}{16} = -1.0.$$

Overflow- und Unterlaufprobleme treten auf, wenn x außerhalb des Darstellungsbereichs liegt.

Gleitkomma. Gleitkommazahlen verwenden Mantisse und Exponent. In der IEEE-754-Darstellung (Single) hat man

$$\text{Sign } s \in \{0, 1\}, \quad \text{Exponent } E \in \{0, \dots, 255\}, \quad \text{Mantisse } M \in \{0, \dots, 2^{23} - 1\}.$$

Der Wert ist

$$x = (-1)^s \cdot (1.M) \cdot 2^{E-127} \quad \text{für } 0 < E < 255.$$

Es gelten Sonderwerte: - E = 0: Normalisierung aufgehoben, subnormale Zahlen, - E = 255: Sonderwerte (Inf, NaN).

Beispiele.

- Eine einfache Zahl: $x = 1.0$ wird dargestellt durch $s = 0$, $E = 127$, $M = 0$ und folgt der Gleichung $x = (+1) \cdot (1.0) \cdot 2^0 = 1.0$.
- Darstellung von 2.5 (IEEE 754, Single): $s = 0$, $E = 128$, $M = 010000000000000000000000$ (23 Bits für die Mantisse).

Beispiel direkt sichtbar:

0 10000000 010000000000000000000000.

(3) Mikroalgorithmen der Rechnerarithmetik

Addition (Binär). Bei n -Bit-Werten a und b mit Übertrag $c_0 = 0$: $s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$, $c_{i+1} = (a_i \wedge b_i) \vee (a_i \wedge c_i) \vee (b_i \wedge c_i)$, für $i = 0, 1, \dots, n-1$. Die Gesamtsumme ergibt sich aus den Bits s_0 bis s_{n-1} ; *der optionale Endübertrag c_n ist der Carry – Out*.

Multiplikation (Shift-and-Add). Zur Multiplikation von a und b (n -Bit-Werte):

$$p \leftarrow 0, \quad \text{für } i = 0 \text{ bis } n-1 : \begin{cases} \text{falls } b_i = 1, & p \leftarrow p + (a \ll i) \end{cases}$$

Das Ergebnis hat im Allgemeinen eine größere Wortbreite; es muss ggf. gerundet oder abgeschnitten werden.

Division (Restoring). Lange Division in der Hardware basiert auf dem Prinzip - initial remainder $r_0 = 0$, $quotient\ q_0 = 0$, $-frivonn-1$ bis 0 : $remainderr := (r \ll 1) \mid a_i$; *subtractord*; wenn $nr \geq 0$ dann $q_i = 1$, $r := r$; *else* $q_i = 0$, $r := r + d$. *Damit erhält man Quotient und Rest*.

Hinweis zu Mikroalgorithmen. Mikroalgorithmen definieren, wie man arithmetische Operationen auf Registertransferebene schrittweise realisiert. Sie hängen stark von Wortbreite, Pipeline-Strategien und Speicherorganisation ab.

(4) Leistungsaspekte und Hinweise

Leistung verstehen. Rechenleistung hängt von Implementierung ab (Wortbreite, Pipeline, Cache). **Beispielkennzahlen.** SPEC-Benchmarks geben grobe Orientierung; der Amdahl's Law-Ansatz

$$S(p) = \frac{1}{(1-p) + \frac{p}{N}},$$

schätzt den Speedup, wobei p der serialer Anteil und N die Grad der Parallelisierung ist.

(5) Aufbau und Kontext

- Zahlendarstellungen bestimmen, wie Rechenoperationen interpretiert werden. - Festkomma vs Gleitkomma: Reichweite, Genauigkeit, Implementierungskosten. - In der Rechnerarithmetik spielt auch die Zuordnung zu Mikroarchitektur, Registerbänken, Pipeline und Cache eine zentrale Rolle. - Die Eins-zu-eins-Abbildung von Rechenaufgaben in Maschinensprache erfolgt oft durch passende Mikroalgorithmen und passende Wortbreiten.

Hinweis: Diese Lernzettel-Datei folgt dem Stil der Vorlage mit Header- und Footer-Beschriftungen. Die Werbebotschaft All We Can Learn sowie der Link bleiben unverändert im Header bzw. Footer erhalten.