Lernzettel

Komplexe Integration: Pfade, Cauchy-Integralformel und Anwendungen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Analysis III für Ingenieure

Thema: Komplexe Integration: Pfade, Cauchy-Integralformel und Anwendungen

(1) Pfade in der komplexen Ebene.

Ein Pfad γ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma \in C^1$ (oder stückweise C^1). Die Orientierung des Pfades ist gegeben. Der Kontur-Integral eines Functionals f entlang γ ist definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;=\; \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt.$$

(1a) Geschlossene Pfade und positive Orientierung.

Ein Pfad ist geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$. Die positive Orientierung entspricht der Gegenrichtung der Uhrzeigerrichtung im Komplexen.

(1b) Beispiele.

$\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ beschreibt den Einheitskreis $|z| = 1$. $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$.

(1c) Eigenschaften der Pfade.

- Lineare Abbildung eines Pfades ist wieder ein Pfad.
- Vereinigung von Pfaden unter Beachtung der Orientierung ergibt einen Pfad.

(2) Cauchy-Integralformel.

Sei f holomorph auf einer Umgebung eines geschlossenen Pfades γ, und sei z_0 im Inneren von γ mit positiver Orientierung gelegen. Dann gilt die Cauchy-Integralformel:

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

(2a) Allgemeine Ableitungen.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(n)}(z_0) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \geq 0.$$

(2b) Folgerungen.

- Analytizität von f folgt aus der Formel (existiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind).
- Daraus folgt die Taylor-Reihe rund um z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

(3) Hinweise zu Konvergenzradien und Schätzungen.

Sei f holomorph auf einer Umgebung eines Kreises $|z - z_0| = R$ und $M = \max_{|z - z_0| = R} |f(z)|$. Dann gilt die Cauchy-Schätzung

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\, M}{R^n}, \quad n \geq 0.$$

(4) Anwendungen.
- Bestimmung von Funktionswerten in Innerem aus Randwerten:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

- Herleitung der Taylor-Reihe durch die Ableitungen $f^{(n)}(z_0)$ aus Konturintegralen. - Abschätzungen der Ableitungen mittels der Cauchy-Schätzung oben. - Ableitungen von Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen durch passende Wahl von f und γ.

(5) Übungsaufgaben.
- Aufgabe 1: Sei $f(z) = e^z$ und γ der Einheitskreis $|z| = 1$. Zeige mit der Cauchy-Integralformel, dass $f^{(n)}(0) = 1$ für alle n. - Aufgabe 2: Sei f holomorph in $|z| < 2$ und γ der Kreis $|z| = 1$. Schreibe die Taylor-Reihe von f um $z_0 = 0$ ausgehend von der Formel

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

- Aufgabe 3 (Skizzenaufgabe): Gib eine Kontur an, mit der man den Wert $f(-1)$ für eine gegebene f bestimmen kann, sofern f in einer Umgebung von $|z + 1| \leq 1$ holomorph ist.