

Lernzettel

Singularitäten in der komplexen Ebene: isolierte
Singularitäten, Removable, Polstellen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Analysis III für Ingenieure

Lernzettel: Singularitäten in der komplexen Ebene**(1) Allgemeine Definitionen und Terminologie.**

Eine Funktion f ist definiert auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt isolierter Singulärpunkt von f , falls es $\rho > 0$ gibt mit

f ist harmonisch/analytisch auf $0 < |z - a| < \rho$ und f nicht analytisch bei a .

Damit ist a eine isolierte Singularität, und außerhalb von a lässt sich f in einer Umgebung ungestört fortsetzen.

(2) Entfernbare Singularität (Removable).

Eine isolierte Singulärstelle a heißt entfernt, wenn es eine holomorphe Fortsetzung in a gibt. Äquivalente Charakterisierung:

- $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ existiert reell oder komplex; dann ist $g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ L, & z = a \end{cases}$ eine holomorphe Erweiterung von f auf a .
- f ist nahe von a beschränkt; dann existiert ebenfalls eine entfernbare Singularität.

In der Laurent-Reihe um a hat der negative Teil keine Glieder, d. h. alle Koeffizienten $a_{-n} = 0$ für $n \geq 1$.

(3) Polstelle (Pole).

Eine isolierte Singulärstelle a ist eine Polstelle von Ordnung $m \geq 1$, falls

$(z - a)^m f(z)$ in einer Umgebung $0 < |z - a| < \rho$ analytisch und $(z - a)^m f(z)|_{z=a} \neq 0$.

In der Laurent-Reihe um a gilt dann

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad a_{-m} \neq 0.$$

Die Ordnung m ist die kleinste Zahl mit der obigen Eigenschaft. Beispiele:

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)}, \quad \text{Pole erster Ordnung bei } a; \quad f(z) = \frac{1}{(z - a)^3}, \quad \text{Pole dritter Ordnung bei } a.$$

(4) Klassifikation isolierter Singularitäten.

Jede isolierte Singulärstelle von f ist entweder

- *entfernbare Singularität* (kein negativer Teil der Laurent-Reihe),
- *Polstelle* (endlicher negativer Teil der Laurent-Reihe),
- *essentielle Singularität* (unendlicher negativer Teil; der negative Teil der Laurent-Reihe hat unendlich viele Terme).

Hinweis: Die Laurent-Entwicklung um a gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < \rho.$$

Nur drei Fälle treten konkret auf, je nach Struktur des PrincipalParts.

(5) Beispiele und Anwendungen.

- Entfernbare Singulität: $f(z) = \frac{z-a}{z-a}$ für $z \neq a$. Um a herum ist f konstant und die Singulität ist entfernbar; Der stetige Grenzwert ist 1.
- Polstelle erster Ordnung: $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Bei $z \rightarrow a$ divergiert $|f(z)| \rightarrow \infty$; Ordnung $m = 1$.
- Polstelle höherer Ordnung: $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$ mit $m \geq 2$. Ordnung m exactly.
- Essential: $f(z) = e^{1/(z-a)}$ besitzt eine essentielle Singulität bei a ; hier entwickelt sich die Funktion in der Umgebung stark unregelmäßig.

(6) Hinweise zur praktischen Bestimmung.

Um die Art einer Singulärität zu bestimmen, kann man verwenden:

- Laurent-Reihe um a bestimmen (ggf. durch Begriffe aus Ableitungen bzw. Integralen ableiten),
- Prüfen, ob der negative Teil der Reihe verschwindet (entfernbar) bzw. nur finit ist (Pole),
- Verhalten von $(z-a)^m f(z)$ für passendes m testen.

(7) Verknüpfung mit der Residuenbildung (kurzer Ausblick).

Für Pole der Ordnung m existieren Koeffizienten des negativen Teils der Laurent-Reihe $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}$. Die Residuen (a_{-1}) ergeben sich durch

$$\text{Res}(f, a) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)),$$

falls f eine Polstelle von Ordnung m hat. Dieser Punkt führt später zum Residuensatz.