Lernzettel

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

(1) Grundlagen: Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion.

Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau einen Wert $f(x) \in Y$ zu.

Vollständige Induktion. Sei $P(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n.

$$\text{Basisfall: } P(0) \text{ gilt.} \quad \text{Induktionsschritt: } \forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Aus $P(0)$ und dem Induktionsschritt folgt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Zahldarstellungen, reelle Zahlen und komplexe Zahlen

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bezeichnen Ganzzahlen, rationale Zahlen, reelle und komplexe Zahlen.
Der Betrag/Modul heißt $|x|$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $|z|$ für $z \in \mathbb{C}$ und erfüllt $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Eine komplexe Zahl schreibt man als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$.
Wichtige Formen: Polarform $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bzw. $z = re^{i\varphi}$.

(3) Folgen, Konvergenz, unendliche Reihen, Potenzreihen, Grenzwerte und Stetigkeit

Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen $L \in \mathbb{R}$ if

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \; n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn die Partialsummen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ gegen einen Grenzwert S konvergieren.

Potenzreihen: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ mit Radius der Konvergenz R (deren Existenz und Wertegrößen folgen aus der Cauchy-Hadamard-Formel).

Grenzwerte Stetigkeit. Eine Funktion f hat an a einen Grenzwert L und ist stetig dort, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

(4) Elementare rationale und transzendente Funktionen

Rationale Funktionen: Quotienten von Polynomen $p(x)/q(x)$ mit $q \not\equiv 0$.

Transzendente Funktionen: Exponentialfunktion $\exp(x)$, Logarithmus $\log(x)$, trigonometrische Funktionen $\sin x, \cos x$, deren Ableitungen unendlich oft fortsetzen lassen.

(5) Differentiation, Extremwerte, MVT und Taylor

Ableitung: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Regeln: Lineare und Produkt- bzw. Kettenregel.
Mittlerer Satz über den Mittelwert (MVT): Existiert $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Taylor-Polynom und Taylorreihe: Um x in der Nähe von a schreibe

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

bis gewünschter Genauigkeit.

Anwendungen der Differentiation: Extremstellen, Krümmung, Optimierung, Fehlerabschätzung.

(6) Bestimmtes und unbestimmtes Integral; Integration

Unbestimmtes Integral: $\int f(x)\,dx$ als AllgemeinAntiderivat.

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)\,dx$ mit Fundamentaltheorem der Analysis.

Rationale und komplexe Funktionen integrieren: Partielle Integration, Substitution, Residuen-Satz für komplexe Integrale.

Uneigentliche Integrale: Integrale über unendliche Grenzen oder mit unbeschränktem Integranden.

Fourierreihen: Darstellung periodischer Funktionen als Summe von Sinus- und Kosinus-Terms.

(7) Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Gauss-Algorithmus

Matrizenoperationen: Addition, Multiplikation, Transponieren, Inversenbildung.

Lineare Gleichungssysteme: Lösung über Gauss-Algorithmus; Reihenfolge Gauss-Elimination mit Pivotisierung.

Determinanten: Zahl, die Skalarfaktor bei Linial-Transformationen angibt; $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Eigenwerte/Eigenvektoren: $Av = \lambda v$; charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$.

(8) Vektoren, Vektorräume; Lineare Abbildungen; Dimension und Unabhängigkeit

Vektorräume: Mengen mit Addition und Skalar-Multiplikation satisfying axioms.

Lineare Unabhängigkeit/Basis/Dimesion: Eine Basis ist eine minimale Erzeugendensystem; $\dim V$ ist die Anzahl der Vektoren in einer Basis.

Lineare Abbildungen: Kartierungen $T : V \to W$ mit $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$.

Matrixalgebra und Vektorgeometrie: Fokus auf Spaltenräume, Rang, Orthogonalität, Skalarprodukte (z. B. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$) und Normalformen.

Determinanten Eigenwerte (Kombination): Verbindet Gauß-Elimination mit Det-Ausrechnung; Eigenwerte liefern Stabilitäts- und Modes-Informationen.

Lineare Differentialgleichungen: Beispiel

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t),$$

mit homogener Lösung aus der Charakteristikkurve und spezieller Lösung bei inhomogener Störung.

(9) Lineare Differentialgleichungen (Fortsetzung)

- Erste Ordnung: Lösung durch Separation, Integrating Factor, oder Vektorform $y' = Ay + g(t)$.
- Sekunde Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Lösungen von $ay'' + by' + cy = 0$ durch charakteristische Gleichung $ar^2 + br + c = 0$.
- Superposition und Stabilität: Überlagerung von Lösungen; Grund- und Speziallösungen.

Hinweis zu den Lernzielen des Kurses Der Lernzettel fasst die methodischen Grundlagen der mathematischen Fundierung der Natur- und Ingenieurwissenschaften zusammen. Er dient der Orientierung für die Themenbereiche der Analysis I und Linearer Algebra, einschließlich der Behandlung von Mengen, Abbildungen, Folgen, Grenzwerte, Integration, sowie Matrizen, Vektorräume, lineare Abbildungen und lineare Differentialgleichungen. Die Inhalte hier sind so gewählt, dass sie als Grundlage für mathematische Modelle in den Ingenieurwissenschaften dienen.