Lernzettel

Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion

(1) Mengen.
Eine Menge ist eine wohlgeordnete Sammlung von Objekten (Elementen). Die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge wird durch $\in$ notiert. Der Ausdruck $x \in A$ bedeutet: x ist ein Element von A.

Notation und grundlegende Begriffe.

$$A \subseteq B$$

bedeutet: Jedes Element von A ist auch in B enthalten.

$$\emptyset$$

ist die leere Menge, sie enthält kein Element.
Falls eine Menge A endlich ist, nennt man deren Anzahl der Elemente die Mächtigkeit

$$|A| \quad \text{und} \quad A \text{ hat } |A| \text{ Elemente.}$$

Beispiele.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}$$

sind Mengen mit unterschiedlicher Mächtigkeit bzw. Struktur.

Sammel- und Mengenoperationen.
Zu zwei Mengen A und B gehören u. a.

$$A \cup B$$
$$A \cap B$$
$$A \setminus B$$
$$A^c$$

(Notation: Komplement in einem Universum U, falls nötig.)

(2) Abbildungen.
Eine Abbildung/Abbildungsvorstellung $f : A \to B$ ordnet jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zu.

Bild und Urbild.

$$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \subseteq B$$
$$f^{-1}(B') = \{\, a \in A \mid f(a) \in B' \,\}, \quad B' \subseteq B$$

Eigenschaften von Abbildungen.

$$f \text{ injektiv} \iff x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f \text{ surjektiv} \iff \forall y \in B \; \exists x \in A: \; f(x) = y$$
$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ injektiv und surjektiv}$$

Bild eines Vereinigungsvorhergehers.

$$f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$$

Bild eines Schnitts.

$$f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$$

Komposition.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

(3) Vollständige Induktion.
Sei $P(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n. Dann gilt das Prinzip der vollständigen Induktion:

$$\text{Basisfall: } P(n_0) \text{ gilt, mit } n_0 \in \mathbb{N}.$$
$$\text{Induktionsschritt: } \forall n \geq n_0: \; P(n) \Rightarrow P(n+1).$$
$$\therefore \; \forall n \geq n_0: \; P(n) \text{ gilt.}$$

Beispiel: Summe der ersten n natürlichen Zahlen.
Sei $P(n)$ definiert durch

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Basisfall. Für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Induktionsschritt. Angenommen $P(n)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1).$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Schlussfolgerung. Damit gilt $P(n)$ für alle $n \geq 1$.