Lernzettel

Zahldarstellungen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Zahldarstellungen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen

(1) Zahldarstellungen. Zahldarstellungen sind verschiedene Arten, Zahlen zu notieren. Sie bilden die Basis der Zahlentheorie und der Analysis.

Bruchdarstellung (rationale Zahlen). Eine rationale Zahl lässt sich darstellen als

$$x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0.$$

Dezimaldarstellung. Jede rationale oder reelle Zahl besitzt eine Dezimaldarstellung. Terminiert eine Dezimaldarstellung, sonst ist sie periodisch.

Wichtige Eigenschaft zu rationalen Zahlen:

q hat als Primfaktoren nach Reduktion in niedrigster Form nur 2 und 5 $\Rightarrow$ Terminating decimal.

$$q \text{ enthält andere Primfaktoren } \Rightarrow \text{ periodische Dezimaldarstellung.}$$

Beispiele.

$$\frac{7}{3} = 2.\overline{3} \quad \text{(periodisch)}$$
$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{(terminierend)}$$

(2) Reelle Zahlen. $\mathbb{R}$ ist der Satz von Zahlen, der Q ergänzt und die Grundlage der kontinuierlichen Modelle bildet. Die reellen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen Zahlen einen vollständigen, geordneten Körper.

Wichtige Eigenschaften. - Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

$$\forall a < b \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < q < b.$$

- Vollständigkeit (Satz vom Supremum): Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ besitzt $\sup S \in \mathbb{R}$. - Absoluter Wert:

$$|x| \geq 0, \quad |x| = x \text{ für } x \geq 0, \quad |x| = -x \text{ für } x < 0.$$

- Ordnung: Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen $x < y$, $x = y$, $x > y$.

(3) Komplexe Zahlen. Die komplexen Zahlen definieren sich als

$$\mathbb{C} = \{\, z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \,\}.$$

Rechenoperationen.

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

Addition:

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

Multiplikation:

$$zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Division (gilt nur für $w \neq 0$):

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}, \quad \overline{w} = u - iv,\ |w|^2 = u^2 + v^2.$$

Betrag und Konjugation.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \overline{z} = x - iy, \quad z\,\overline{z} = |z|^2.$$

Polarform.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = |z|,\ \varphi = \arg(z), \qquad z = re^{i\varphi}.$$

Euler'sche Formel.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Potenzen und Wurzeln.

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

N-te Wurzeln:

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Geometrische Interpretation. - Betrag: Abstand des Punktes z vom Ursprung. - Argument: Winkel mit der positiven Realachse. - Multiplikation: Beträge multiplizieren, Winkel addieren. - Division: Beträge teilen, Winkel subtrahieren.

Beispiele.

$$z = 3 + 4i \quad \Rightarrow \quad |z| = 5,\ \overline{z} = 3 - 4i.$$

$$3 + 4i = 5\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big), \quad \varphi = \arctan\frac{4}{3}.$$