Lernzettel

Zahlenfolgen, Konvergenz, Grenzwerte und Stetigkeit

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Zahlenfolgen, Konvergenz, Grenzwerte und Stetigkeit

(1) Zahlenfolgen (Sequenzen). Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abfolge reeller Zahlen, d.h. für jedes n gilt $a_n \in \mathbb{R}$. Die Konvergenz einer Folge gegen L bedeutet:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Beispiele:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

$$a_n = (-1)^n \text{ konvergiert nicht.}$$

(2) Grenzwerte von Folgen (Rechenregeln). Eine Folge (a_n) hat Grenzwert A usw.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B, \quad \lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = cA, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = AB.$$

Voraussetzung: $\lim b_n = B$ und ggf. $B \neq 0$ für Bruch.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

(3) Grenzwerte von Funktionen. Definition des Grenzwerts an x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(4) Stetigkeit. Eine Funktion f ist stetig an x_0, wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Äquivalent dazu: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so, dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(5) Eigenschaften der Stetigkeit. Beispiele: Polynome und rationale Funktionen mit Definitionsbereich sind stetig. Die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$. Stetigkeit unter Rechenregeln:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

und falls $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

(6) Folgen durch Funktionen (Kettenregel). Sind $a_n \to A$ und f stetig an A, dann

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A).$$

(7) Typische Grenzwerte. Beispiele:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 1) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$