Lernzettel

Reihen, unendliche Reihen und Potenzreihen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Reihen, unendliche Reihen und Potenzreihen

(1) Grundbegriffe
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Zuordnung von Indizes zu reellen oder komplexen Zahlen. Die zugehörige Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Der Betrag der Summe wird durch die Partialsummen definiert

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert S, falls

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Geometrische Reihe
Für $|r| < 1 giltdieSummedergeometrischenReihe \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$.

Wichtige Reihen und Divergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad (p > 1 \text{ konvergiert}, \, p \leq 1 \text{ divergiert}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{(harmonische Reihe abwechselnd konvergent, tatsächlich divergent).}$$

Konvergenztests (Grundideen)
Quotienten-/Verhältnis-Test. Sei $a_n \neq 0$ für hinreichend große n und

$$L := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

$$\text{Ist } L < 1, \text{ dann konvergiert } \sum a_n \text{ absolut.}$$

$$\text{Ist } L > 1 \text{ bzw. } L = \infty, \text{ dann divergiert } \sum a_n.$$

$$\text{Ist } L = 1, \text{ ist der Test inconclusive.}$$

Wurzeltest.

$$\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

$$\text{Konvergiert } \sum a_n \text{ falls } \rho < 1, \quad \text{divergiert falls } \rho > 1.$$

Leibniz-Kriterium (alternierende Reihe). Falls $a_n \geq 0$ monotonisch fallend ist und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ konvergiert.}$$

Vergleichskriterium. Seien $0 \le a_n \le b_n$ für alle großen n. Wenn $\sum b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$. Wenn $\sum a_n$ divergiert und $a_n \ge 0$, dann divergiert auch $\sum b_n$.

(2) Potenzreihen

Eine Potenzreihe hat die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Konvergenzradien. Der Radius der Konvergenz R erfüllt

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}} \quad \text{(falls der Grenzwert existiert)},$$

bzw.

$$\text{Konvergenz für } |x - x_0| < R, \qquad \text{Divergenz für } |x - x_0| > R.$$

An den Randpunkten $|x - x_0| = R$ kann Konvergenz oder Divergenz auftreten und muss gesondert geprüft werden.

Termweise Differentiation und Integration.
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Radius $R > 0$. Dann gilt innerhalb des Intervalls $|x - x_0| < R$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (x - x_0)^{n-1},$$

und

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C.$$

Beispiele.
Geometrische Reihe als Potenzreihe mit $x_0 = 0$ und $c_n = r^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

(3) Taylor- und Maclaurinreihen (Kurzüberblick).

Eine Funktion f mit ausreichender Glattheit um x_0 lässt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

wobei der Summenausdruck eine Potenzreihe ist. Die klassische Spezialform ist die Maclaurinreihe $x_0 = 0$.

(4) Anwendungen und Hinweise.

- Reihen können Funktionen nähern bzw. definieren (z. B. Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen via Potenzreihen).
- Die Konvergenzräume sind häufig offen, und Randpunkte müssen getrennt geprüft werden.

- Operationen an Potenzreihen (Ableiten, Integrieren) bleiben innerhalb des Konvergenzradius gültig.

Hinweis zu den Schriftarten und Notationen.
Alle Formeln sind sauber als eigenständige Display-Formeln gesetzt und getrennt von laufendem Text dargestellt, damit Interpretationen und Struktur klar bleiben.