

Lernzettel

Residuensatz und Residuenberechnung mit Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Analysis III für Ingenieure

Lernzettel: Residuensatz und Residuenberechnung mit Anwendungen**(1) Grundbegriffe der Residuenberechnung.**

Eine isolierte Singularität z_0 einer Funktion f ist ein Punkt, um den f analytisch ist, außer eventuell in z_0 . In einer punktierten Umgebung von z_0 lässt sich f durch eine Laurentreihe darstellen:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Der Koeffizient a_{-1} wird als Residue von f bei z_0 bezeichnet:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

(2) Die Residuenformeln.

Die Residue am isolierten Pol bei z_0 gilt auch über das Konturintegral

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

wobei γ eine kleine positiv orientierte Kreislinie um z_0 ist.

Bei einer Ordnung m des Pols gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Für das Spezialfall, dass $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit einer einfachen Nullstelle von h bei z_0 ($h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ und g ist analyt) gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(3) Der Residuensatz.

Sei f auf und im Rand eines geschlossenen Konturs C analytisch, außer für eine endliche Anzahl isolierter Singularitäten z_k innerhalb von C . Dann gilt

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k),$$

und die Orientierung von C ist vorausgesetzt positiv (Gegen den Uhrzeigersinn).

(4) Beispiel 1: Residuenberechnung.

Betrachte $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$. Es gibt einfache Pole bei $z = \pm 1$.

Berechnung der Residuen:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{z-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Wähle einen Kontur C mit positiv orientierung, die beide Pole einschließt. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i.$$

(5) Anwendung I: Realintegrale über Konturen.

Betrachte

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Funktionen $\frac{1}{z^2+1}$ hat Pole bei $z = \pm i$. Für die obere Halbeinflusskante ist nur $z = i$ innerhalb der Kontur;

$$\text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}, z = i \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i}.$$

Da der Rand der Halbkreis gegen Unendlichkeit verschwindet, folgt

$$I = \oint f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

(6) Anwendung II: Fourier-artige Integrale.

Betrachte

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Für $k > 0$ wählt man die obere Halbeinflusskante. Die einzigen relevanten Pole sind $z = \pm i$; im oberen Halbebenenbereich liegt der Pol bei $z = i$. Der Residuumswert dort ist

$$\text{Res} \left(\frac{e^{ikz}}{z^2 + 1}, z = i \right) = \frac{e^{iki}}{2i} = \frac{e^{-k}}{2i}.$$

Somit erhält man

$$I(k) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-k}}{2i} = \pi e^{-|k|}.$$

Für $k = 1$ folgt $I(1) = \pi e^{-1}$.

(7) Vorgehen in der Praxis.

- Bestimme alle isolierten Pole von f in der betrachteten Region.
- Bestimme deren Ordnung m (falls nötig).
- Berechne die Residuen (direkt via Reduktion, oder mittels Laurentreihe).
- Wende den Residuensatz an, um Integrale zu evaluieren.
- Prüfe, ob der Randbeitrag verschwindet (je nach Abklingverhalten von f).

(8) Randfälle und Hinweise.

- Sind Singularitäten essenzielle oder Verzweigungspunkte, gelten andere Techniken; der Residuensatz im dargestellten Sinn ist dann nicht unmittelbar anwendbar.
- Bei mehreren Konturen gilt die Summe der Residuen innerhalb der jeweiligen Konturen.

(9) Übungsaufgaben.

- Aufgabe 1: Bestimme $\text{Res}(f, z_0)$ für $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ an $z = 1$ und $z = 2$; dann berechne $\oint_C f(z) dz$ über eine Kontur, die beide Pole einschließt.

- Aufgabe 2: Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$ mit dem Residuensatz.
- Aufgabe 3: Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx$ und verallgemeinere auf $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx$.

(10) Notation und zusätzliche Hinweise.

- Laurentreihe: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
- $\text{Res}(f, z_0)$ ist der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1}$ in der Laurententwicklung.
- Positive Orientierung bedeutet Gegen den Uhrzeigersinn.