Lernzettel

Differentiation: Ableitung, Mittelwertsatz, Extremwerte und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften – Differentiation: Ableitung, Mittelwertsatz, Extremwerte und Anwendungen

(1) Ableitung
Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x ist der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Beispiele für Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} c = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(ax + b) = a.$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Hinweis: Die Ableitung beschreibt die lokale Änderungsrate von f und liefert Information über Steigung und Verhalten der Kurve.

(2) Mittelwertsatz
Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Als Folgerung gilt: Für jedes $x, y \in [a, b]$ gibt es ξ zwischen x und y mit

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{t \in [a,b]} |f'(t)| \cdot |x - y|.$$

Anmerkung: Der Mittelwertsatz liefert eine Verbindung zwischen durchschnittlicher Änderung und Momentanänderung der Funktion.

(3) Extremwerte
Kritische Stellen erfüllen

$$f'(c) = 0 \quad \text{oder} \quad f' \text{ undefiniert an } c.$$

Erster Ableitungstest. Falls f' links von c positiv und rechts von c negativ ist, dann ist c ein lokales Maximum; Wechselseitig führt zu lokaler Minimum.

Zweiter Ableitungstest. Falls $f''(c) > 0$, dann lokales Minimum; Falls $f''(c) < 0$, dann lokales Maximum; Falls $f''(c) = 0$, ist der Test inconklusiv.

Endpunkte. Für globale Extrema auf einem abgeschlossenen Intervall müssen oft auch die Funktionswerte an den Randpunkten betrachtet werden.

Beispiel. Bestimme lokale Extrema von $f(x) = x^3 - 3x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \qquad f''(x) = 6x.$$

$$f'(-1) = 0, \quad f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum bei } x = -1.$$

$$f'(1) = 0, \quad f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum bei } x = 1.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, \quad f(1) = 1 - 3 = -2.$$

(4) Anwendungen

- Monotonie und Extremwerte aus der Ableitung ableiten: Wenn $f' \geq 0$ (bzw. > 0) auf $[a, b]$, dann ist f monoton nicht-abnehmend (streng monoton steigend).
- Lineare Approximation (Tangente): Die Gerade

  $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

  liefert eine Näherung von $f(x)$ nahe a. Der Fehler der Näherung lässt sich unter weiteren Voraussetzungen durch Taylor-Ungerichtelemente abschätzen; z. B.

  $$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2 \quad \text{für some } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x.$$

- Fehlerabschätzung via MVT: Gilt $|f'(t)| \leq M$ für alle $t \in [a, b]$, dann

  $$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|.$$

- Beispiel zur Anwendung: Optimierungsproblem durch Gleichsetzen von Ableitungen (erste Ordnung) und ggf. zweite Ableitung oder MVT-Kriterien nutzen.

Übungsbeispiel (Beispiel-Übung). Bestimme die Extremstellen von $g(x) = x^4 - 4x^2$.

$$g'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2), \quad g''(x) = 12x^2 - 8.$$

Kritische Punkte: $x = 0, \pm\sqrt{2}$.

$$g''(0) = -8 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ lokales Maximum.}$$

$$g''(\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ lokales Minimum.}$$

$$g''(-\sqrt{2}) = 16 > 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ lokales Minimum.}$$