Lernzettel

Höhere Ableitungen, Taylorpolynom und Taylorreihe

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Höhere Ableitungen, Taylorpolynom und Taylorreihe

(1) Höhere Ableitungen und Taylor-Notation. Sei f auf einem Intervall I um einen Punkt $a \in I$ dreimal bzw. bis Ordnung $n+1$ differenzierbar. Die Ableitungen höherer Ordnung nennen wir $f^{(k)}$ mit $k = 0, 1, \ldots, n+1$ und $f^{(0)} = f$. Die Taylor-Polynomordnung n von f um a ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Der Restterm in der Lagrange-Form lautet

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x.$$

Zusammen ergibt sich die Taylor-Reihe (falls konvergiert)

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x).$$

(2) Taylorpolynom. Das Taylorpolynom ordnet einer Funktion nahe a eine einfache Polynomfunktion zu, die deren Verhalten bis zur Ordnung n approximiert. Die zentrale Gleichung ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Beispiele: - Betrachte $f(x) = e^x$ und $a = 0$ (Maclaurin-Reihe):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Der Restterm ist

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

- Betrachte $f(x) = \ln(1+x)$ mit $a = 0$ (Maclaurin-Reihe, $|x| < 1$):

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Die vollständige Taylorreihe lautet

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Der Radius der Konvergenz ist $R = 1$; außerhalb von $(-1, 1)$ gilt die Reihe nicht mehr sicher.

(3) Taylorreihe. Die Taylorreihe von f um a ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Wichtige Eigenschaft: Die Reihe konvergiert im Intervall $|x-a|<R$ mit Radius $R>0$. Der Radius lässt sich allgemein über die Koeffizienten $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ bestimmen:

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|} \right)^{-1}.$$

Beispiele zur Konvergenz: - $f(x)=e^x$ hat $R=\infty$ (unbeschränkter Konvergenzradius). - $f(x)=\sin x$ und $f(x)=\cos x$ haben ebenfalls $R=\infty$. - $f(x)=\ln(1+x)$ um $a=0$ hat $R=1$.

(4) Konvergenz und Fehlerabschätzung. - Falls f analytisch in einer Umgebung von a ist, konvergiert die Taylorreihe zu f in einem Intervall $|x-a|<R$. - Der Restterm $R_{n+1}(x)$ liefert eine obere Abschätzung des Fehlers bei endlicher Ordnung n. Im Lagrange-Form bleibt $R_{n+1}(x)$ abhängig von einem Zwischenwert ξ.

(5) Anwendungshinweise. - Taylorpolynome dienen zur lokalen Approximation von Funktionen durch Polynome. - Erste Ordnung (Linearisierung):

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a).$$

- Höhere Ordnung liefern genauere Approximationen und ermöglichen Fehlerabschätzungen durch den Restterm.

(6) Beispiele und kurze Übung. - Approximiere $f(x)=\cos x$ um $a=0$ bis Ordnung $n=4$. Die Maclaurin-Reihe von $\cos x$ ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Danach ist

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

- Bestimme die Taylorreihe von $f(x)=\sqrt{1+x}$ um $a=0$ bis Ordnung $n=3$. Es gilt

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots.$$

Daraus ergibt sich

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$