Lernzettel

Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Techniken der Integration, uneigentliche Integrale

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Techniken der Integration, uneigentliche Integrale

(1) Bestimmtes vs. unbestimmtes Integral.
Das unbestimmte Integral einer Funktion f ist eine Stammfunktion:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{mit } F'(x) = f(x).$$

Das bestimmte Integral über das Intervall $[a, b]$ misst Flächen (unter Vorzeichen) und ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

(1a) Fundamentaltheorem der Analysis.
Ist f auf $[a, b]$ stetig, dann:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

Und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(2) Eigenschaften des Integrals.
Linearität:

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Additivität über Teilintervalle:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(2a) Substitution (U-Substitution).
Für eine wohldefinierte Substitution $x = \phi(u)$ mit ϕ invertierbar und $\phi'(u) \neq 0$ gilt

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(u))\,\phi'(u)\,du.$$

Bei bestimmten Integralen verschieben sich zusätzlich die Integrationsgrenzen entsprechend.

(2b) Integration durch Substitution (Beispiel).
Sei $u = x^2$, dann

$$\int 2x\,\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C.$$

(2c) Integration durch Teile.
Für $u(x)$, $v(x)$ mit u, v differenzierbar gilt:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

(2d) Trig-Substitution.
Besonders bei Radikalen der Form $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ kann man durch passende Substitutionen vereinfachen, z. B. $x = a \sin\theta$ oder $x = a \tan\theta$.

(2e) Partialbruchzerlegung (rationale Funktionen).
Rationale Funktionen $R(x) = P(x)/Q(x)$ mit $\deg P < \deg Q$ lassen sich in Teilsummen zerlegen, sodass

$$\int R(x)\,dx$$

aus einfach integrierbaren Termen besteht.

(2f) Integrale rationaler Funktionen, kombinierte Techniken.
Durch geschickte Kombination aus Substitution, Teilen und Partialbruch kann oft jedes Bruchintegral gelöst werden.

(2g) Numerische Integration (Kurzüberblick).
Für unharmonische oder nicht-analytische Funktionen nutzt man Verfahren wie die Trapezregel oder Simpsonregel, falls eine analytische Stammfunktion nicht existiert.

(2h) Wichtige Formeln zur numerischen Approximation.
Trapezregel (einfach):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big).$$

Simpsonregel (einfacher Fall, zwei Teilintervalle):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) + f(b)\big).$$

(3) Uneigentliche Integrale.
Definition: Ein uneigentliches Integral liegt vor, wenn der Integrationsbereich unendlich ist oder die Funktion eine Unstetigkeit in der Integrationsgrenze besitzt.

(3a) Integrale über unendliche Intervalle.
Beispiel:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

(3b) Integrale mit Unstetigkeitsstellen im Intervall.
Für eine Unstetigkeit bei $c \in (a, b)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

wobei beide Teilintegrale als Grenzwerte definiert werden:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx, \qquad \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

(3c) Konvergenztests (Beispiele).

Beispiel: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergiert genau dann, wenn $p > 1$; dann gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}.$$

Beispiel: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergiert genau dann, wenn $p < 1$; in diesem Fall

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}.$$

(4) Anwendungen.

- Bestimmung von Flächen unter Kurven: $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ($f \geq 0$ fast überall). - Wertevon Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Physik- und Technik-Anwendungen, z. B. Energie- bzw. Arbeit-Berechnungen:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx \quad \text{(Arbeit bei Kraft F).}$$

(5) Hinweise zur Übung.

- Prüfe zunächst, ob eine Stammfunktion existiert oder ob eine Substitution sinnvoll ist. - Nutze FTC II, um von Stammfunktionen zu konkreten Flächen zu gelangen. - Bei uneigentlichen Integralen: Prüfe zuerst die Konvergenz der Teil-Integrale.

(6) Kurzüberblick – Alle Kernformeln.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{(FTC II)},$$

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int f(g(u))\,g'(u)\,du = \int f(x)\,dx \quad (x = g(u)),$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) \quad \text{(Trapezregel)},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) + f(b)\big) \quad \text{(Simpsonregel)},$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$