Lernzettel

Fourierreihen und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Fourierreihen und Anwendungen

(1) Grundlagen und Zielsetzung.

Eine Fourier-Reihe zerlegt eine periodische Funktion f mit der Periode $2\pi ineineSummevonKosinus-undSinus-Terminen.Formalgiltfrfmitf$ periodisch, $f \in L^1(-\pi, \pi)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Die Koeffizienten sind definiert als

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad (n \geq 1),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \geq 1).$$

(2) Komplexe Form der Fourierreihen.

Für eine periodische Funktion f mit Periode $2\pi giltdiekomplexeDarstellungf(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$

(3) Konvergenz und Dirichlet-Bedingungen.

Sei f stückweise stetig und periodisch sowie integrierbar. Dann gilt:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{für} x \text{ an Sprungstellen,}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x) \quad \text{an stetigen Stellen,}$$

wobei

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

(4) Beispiel: Rechtecksignal.

Betrachte die periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0, \end{cases} \quad \text{mit periodischer Fortsetzung.}$$

Es gilt:

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit hat man die Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nx).$$

(5) Anwendungen der Fourierreihen.
- Signalzerlegung und Rekonstruktion: Jedes periodische Signal wird als Summe von Harmonischen dargestellt.
- Rekonstruktion durch Partialreihen:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

- Frequenzanalyse: Bestimme Dominanzfrequenzen und Filterwirkungen durch Abbruch bzw. Modifikation der Koeffizienten.
- Gibbs-Phänomen: Bei diskontinuierlichen Signalen weist die partielle Summe Überschwingungen nahe Sprüngen auf. Die maximale Überschwingung liegt ungefähr bei 9

(6) Fourier-Reihen in partiellen Differentialgleichungen (PDE).
Beispiel: 1D-Wärmeleitung auf dem Intervall [0,L] mit homogenen Randbedingungen

$$u_t(x,t) = \alpha\, u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Die Initialbedingung ist $u(x,0) = f(x)$. Die Lösung lässt sich als Sinusreihe darstellen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha (n\pi/L)^2 t},$$

mit

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

(7) Praktische Hinweise.
- Wähle die geeignete Basis: Kosinus/Sinus oder komplexe Exponentialform, je nach Symmetrie von f.
- Bei ungeraden/geraden Eigenschaften vereinfacht sich oft die Koeffizientenbildung.
- Graphische Darstellung der Koeffizientenverteilung (Amplitude vs. Frequenz) erleichtert das Verständnis.
- Beim PDE-Anwendungsfall ist die Wahl von Randbedingungen entscheidend für die Form der Basisfunktionen.

(8) Weiterführende Begriffe und Verbindungen.
- Fourier-Transformation als Grenzfall der Fourier-Reihe für unendliche Periode.
- Zusammenhang zwischen Differentiation und Multiplikation der Frequenzen:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(\omega) = i\omega\, \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega),$$

was in der Praxis zur Analyse von Glattheits- und Stabilitätsmerkmalen genutzt wird.
- Gibbs-Phänomen bleibt bei diskreten Approximationen ein zentrales Thema in der Praxis.