Lernzettel

Vektoren, Vektorräume, lineare Abbildungen, Dimension und lineare Unabhängigkeit

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Vektoren, Vektorräume, lineare Abbildungen, Dimension und lineare Unabhängigkeit

(1) Vektoren und Vektorräume. Ein Vektorraum V über dem Körper F (typisch F = $\mathbb{R}$) ist eine Menge mit

- einer Addition $+\colon V \times V \to V$ und
- einer Skalarmultiplikation $\cdot\colon F \times V \to V$,

welche die Axiome des Vektorraumdefinitionssatzes erfüllt (Assoziativität und Kommutativität der Addition, Existenz eines Nullvektors und additive Inversen, Kompatibilität der Skalarmultiplikation, Distributivität u. a.). Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.
- Der Raum der Polynome $F[x]$ über F.

(2) Teilräume. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann ein Untervektorraum, wenn

- $0 \in W$,
- für alle $u, v \in W$ gilt $u + v \in W$,
- für alle $\alpha \in F$ und $u \in W$ gilt $\alpha u \in W$.

Bemerkung: Randfälle $W = \{0\}$ oder $W = V$ sind Untervektoräume.

(3) Lineare Unabhängigkeit und Erzeugung. Eine endliche Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ ist linear unabhängig, falls

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_k = 0.$$

Der Unterraum $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ besteht aus allen Linearkombinationen $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in F$. Eine Basis von V ist eine Teilmenge, die sowohl linear unabhängig ist als auch V spannt.

(4) Dimension. Die Dimension von V (falls endlich) ist die Anzahl der Elemente einer Basis von V:

$$\dim V = |B| \quad \text{für eine Basis } B \text{ von } V.$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ gilt $\dim V = n$ und jede Standardbasis hat die Größe n.

(5) Lineare Abbildungen. Eine Abbildung $T : V \to W$ zwischen Vektorräumen heißt linear, wenn

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \qquad T(\alpha u) = \alpha\, T(u)$$

für alle $u, v \in V$ und $\alpha \in F$ gilt. Bild und Kern definieren:

$$\operatorname{Im}(T) = \{\, T(v) : v \in V \,\} \subseteq W, \qquad \ker(T) = \{\, v \in V : T(v) = 0 \,\}.$$

(6) Matrixdarstellung und Basiswechsel. Wähle Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ von W. Zuordnung der Koordinaten beobachtet man durch die Matrix $A \in F^{m \times n}$ mit

$$[T(v)]_C = A\,[v]_B \quad (\forall\, v \in V).$$

Rechenregeln mit Matrizen folgen direkt aus der Linearität.

(7) Rang, Nullität und der Satz von Rank–Nullity. Für $T : V \to W$ gilt

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(T), \qquad \dim \ker(T) = \operatorname{Nullitt}(T).$$

Falls V endlich dimensioniert ist,

$$\dim V = \operatorname{Rang}(T) + \operatorname{Nullitt}(T).$$

(8) Isomorphismen und Folgerungen. Eine bijektive lineare Abbildung $T : V \to W$ ist genau dann ein Isomorphismus und erzeugt eine Strukturgleichheit $\dim V = \dim W$. Wenn $\dim V = n$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V ist, dann ist $T(b_i)$ eine lineare Abbildung, deren Koordinatenmatrix bezüglich B und der Zielbasis die Identität hat, falls T ein Isomorphismus ist.

(9) Geometrische Interpretation (Kurz). - Elemente eines Vektorraums verketten lineare Strukturen; Unabhängigkeit bedeutet, dass keine Vektor-Kombination durch Skalare genutzt werden kann, um einen anderen Vektor zu erhalten. - Dimension gibt an, wie viele Freiheitsgrade nötig sind, um jedes Element durch Basisvektoren zu beschreiben.

(10) Beispiele und Anwendungen. - Betrachte $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y, z) = (x + y, z)$. Bestimme $\ker(T)$ und $\operatorname{Im}(T)$ und damit Rang und Nullität von T. - Zeige, dass die Menge $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig ist und damit eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden kann (nach Prüfung der Unabhängigkeit und Da es genau drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$).