Lernzettel

Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Gauss-Algorithmus

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Analysis I und Lineare Algebra – Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Gauss-Algorithmus

(1) Matrizen und Grundbegriffe. Eine Matrix A mit m Zeilen und n Spalten heißt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Geordnete Spaltenvektoren werden oft als $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ geschrieben; Zeilen als $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.

(2) Matrixarithmetik.

Addition und Subtraktion von Matrizen (gleiche Abmessungen):

$$A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad (A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Skalare Multiplikation:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha\, a_{ij}.$$

Produkt zweier Matrizen (Def.):

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p}.$$

Identitätsmatrix:

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(3) Lineare Gleichungssysteme (LGS).

Gegeben ist

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Augmentierte Matrix:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Lösungsmöglichkeiten: - Es gibt eine Lösung, falls $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|\mathbf{b}])$; die Anzahl der freieren Variablen bestimmt die Lösungsmenge. - Eindeutige Lösung, falls $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|\mathbf{b}]) = n$. - Unlösbares System, falls es eine Zeile der Form

$$[0\ 0\ \cdots\ 0\,|\,c] \quad \text{mit } c \neq 0$$

gibt.

(4) Gauss-Algorithmus (Elimination).

Ziel: Matrix in Zeilenstufenform (REF) oder reduzierte Zeilenstufenform (RREF) bringen.

- Wähle Pivotspalte und Pivotzeile, skaliere Zeilen (falls nötig) und wende Zeilenoperationen an: $R_i \leftrightarrow R_j$, $R_i \leftarrow c\,R_i$ $(c \neq 0)$, $R_i \leftarrow R_i + c\,R_j$.
- Forward-Elimination: Nullstelle unter dem Pivot erzeugen; erhält REF.
- Back Substitution: Lösungsbestimmung aus REF oder Weiterarbeit zu RREF.

(5) Gauss-Jordan-Algorithmus (RREF).
Fortführung der Eliminationsschritte so, dass jeder Pivot eine Eins ist und alle anderen Einträge in der Pivot-Spalte Null sind. Dadurch erhält man direkt die Lösungsvorschrift:

$$\mathbf{x} = (\ x_1, \ldots, x_n\ )^\top \quad \text{aus der Gleichung} \quad RREF([A|\mathbf{b}]) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{array}\right].$$

(6) Beispiel: Gauss-Elimination.
Gegebenes LGS (3 Gleichungen, 3 Unbekannte):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right].$$

$$\text{R3} \leftarrow \text{R3} - 4\,\text{R1} \ \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -9 & 9 & -14 \end{array}\right].$$

$$\text{R3} \leftarrow \text{R3} + 3\,\text{R2} \ \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array}\right].$$

$$\text{Führe Rückwärtseinsetzen durch :}$$
$$z = \frac{13}{15}, \qquad 3y + 2z = 9 \Rightarrow y = \frac{109}{45}, \qquad x + 2y - z = 3 \Rightarrow x = -\frac{44}{45}.$$

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{44}{45} \\ \frac{109}{45} \\ \frac{13}{15} \end{bmatrix}}$$

(7) Kurze Zusammenfassung. - Eine Matrixkonfiguration und das zugehörige LGS lässt sich effizient per Gauss-Algorithmus lösen. - REF und RREF liefern klare Aussagen über Existenz und Anzahl der Lösungen. - Augmentierte Matrize und Zeilenoperationen erlauben systematisches Vorgehen.