# Lernzettel

## Determinanten, Eigenwerte und Diagonalisierung

| | |
|---|---|
| **Universität:** | Technische Universität Berlin |
| **Kurs/Modul:** | Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften |
| **Erstellungsdatum:** | September 6, 2025 |

**Lernzettel: Determinanten, Eigenwerte und Diagonalisierung**

**(1) Determinanten.** Die Determinante ist eine skalare Größe, die einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zugeordnet wird und folgende Eigenschaften besitzt:

- Für eine $2 \times 2$-Matrix
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$
- Ist $A$ triangular (obere oder untere Dreiecksmatrix), gilt
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
- Transponieren hat keinen Einfluss auf den Betrag der Determinante:
$$\det(A^T) = \det(A).$$
- Produktregel
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
- $A$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.
- Cofaktor-Expansion (Spalten-/Zeilenexpansion).
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$
wobei $M_{ij}$ die Matrix ist, die durch Streichen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte aus $A$ entsteht.

**(2) Eigenschaften von Determinanten.** Wichtige Konsequenzen:

- $\det(A) = 0$ genau dann, wenn die Spaltenvektoren von $A$ linear abhängig sind.
- $\det(A) \neq 0$ impliziert Invertierbarkeit: $A^{-1}$ existiert.
- $\det(A^T) = \det(A)$ und $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ (falls $A$ invertierbar).
- Bei einer Dreiecksmatrix ist $\det(A)$ gleich dem Produkt der Diagonaleinträge.

**(3) Eigenwerte.** Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ gibt mit
$$Av = \lambda v.$$
Dies ist äquivalent zur Charakteristik-Gleichung
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Für eine $2 \times 2$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt
$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc.$$

**(4) Eigenvektoren.** Für einen gefundenen Eigenwert $\lambda$ gilt das Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)v = 0,$$

welches durch eine Nullmenge von Vektoren $v \neq 0$ gelöst wird. Die entsprechenden Vektoren bilden die Eigenbasiszuordnungen zu den Eigenwerten.

**(5) Diagonalisierung.** Eine Matrix $A$ ist diagonalisierbar, falls es eine invertierbare Matrix $P$ und eine Diagonal-Matrix $D$ gibt mit

$$A = PDP^{-1}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $A$ eine Basis von Eigenvektoren besitzt, d. h. es existieren $n$ linear unabhängige Eigenvektoren.

**(6) Beispiel: Diagonalisierung einer $2 \times 2$-Matrix.** Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Daraus folgen die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2.$$

Zu $\lambda_1 = 5$ gehört der Eigenvektor

$$(A - 5I)v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu $\lambda_2 = 2$ gehört der Eigenvektor

$$(A - 2I)v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wähle

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(5, 2).$$

Die Inverse von $P$ ist

$$\det(P) = -3 \neq 0, \quad P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Überprüfung:

$$P^{-1}AP = D.$$

Damit ist $A$ diagonalisierbar.

**(7) Anwendungen.**

- Lösung linearer Differentialgleichungssysteme durch Diagonalrechnungen.
- Vereinfachung von Potenzberechnungen: $A^k = PD^kP^{-1}$.

- Verständnis über die Struktur einer linearen Transformation durch Eigenwerte (Skalierung entlang Eigenrichtungen).

**(8) Übungsaufgabe (kurz).** Berechne die Eigenwerte und -vektoren von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

prüfe, ob $B$ diagonalisierbar ist, und gib eine passende $P$ sowie $D$ an, falls möglich.