Lernzettel

Lineare Differentialgleichungen und Lösungsverfahren

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Lineare Differentialgleichungen und Lösungsverfahren

(1) Allgemeine Form linearer DGL.
Eine lineare Differentialgleichung n-ten Ordnung hat die Form

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = q(x),$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_k(x)$ und rechtsseitiger Funktion $q(x)$. Die Gleichung ist linear in y und seinen Ableitungen. Bei $q(x) = 0$ spricht man von der Homogen-Gleichung; deren Lösungsmengen bilden einen Vektorraum. Bei $q(x) \neq 0$ spricht man von der inhomogenen Gleichung.

(2) DGL erster Ordnung, Integrationsfaktor.
Betrachte lineare DGL erster Ordnung in der Form

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x).$$

Der Integrationsfaktor ist

$$\mu(x) \;=\; \exp\!\left(\int p(x)\,dx\right).$$

Es gilt

$$\frac{d}{dx}\bigl(\mu(x)\,y(x)\bigr) \;=\; \mu(x)\,q(x),$$

und damit

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx + C\right).$$

Beispiel 1. Löse $y' + 2y = e^x$.
$p(x) = 2 \Rightarrow \mu(x) = e^{2x}$.

$$\frac{d}{dx}\bigl(e^{2x}y\bigr) = e^{2x}e^x = e^{3x}.$$

$$e^{2x}y = \int e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{3x} + C, \quad y(x) = e^{-2x}\left(\tfrac{1}{3}e^{3x} + C\right) = \tfrac{1}{3}e^x + C\,e^{-2x}.$$

(3) DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Gliedert man

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0.$$

Der Ansatz $y = e^{rx}$ führt zur Charakteristik

$$r^2 + a\,r + b = 0 \quad\Rightarrow\quad r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Fallunterscheidung der Lösungen.

- Echte verschiedene reelle Wurzeln $r_1 \neq r_2$:

$$y(x) = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x}.$$

- Doppelte reelle Wurzel $r_1 = r_2 = r$:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}.$$

- Komplexe Wurzeln $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\big).$$

(4) Nicht-homogene DGL zweiter Ordnung.
Gleichung

$$y'' + a\, y' + b\, y = g(x).$$

Allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

mit y_h Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und y_p einer besonderen Lösung.

Lösungsmethoden.

- Methode der unbestimmten Koeffizienten (falls $g(x)$ Form Polynome, $e^{cx}, \sin(cx), \cos(cx)$ hat).
- Variation der Konstanten (Allgemeine Methode).

Beispiel 2. Löse $y'' + 3y' + 2y = e^x$.
Lösungsanteil $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. Versuch $y_p = Ae^x$. Einsetzen liefert

$$(Ae^x)'' + 3(Ae^x)' + 2(Ae^x) = (1 + 3 + 2)Ae^x = 6Ae^x = e^x,$$

also $A = \frac{1}{6}$. Damit

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x.$$

(5) Systeme linearer Differentialgleichungen.
Schreibe Systeme in Matrixform

$$\mathbf{y}'(t) = A\, \mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Lösung durch Matrixexponential

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\, \mathbf{y}(0), \quad e^{At} = V\, e^{\Lambda t}\, V^{-1},$$

falls A diagonalisierbar ist ($A = V\Lambda V^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$).

Beispiel 3. Falls $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, dann $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ mit $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. folgt eine explizite Lösung mittels Eigenvektoren.

(6) Laplace-Transformation (Kurzüberblick).
Die Laplace-Transformation wandelt DGLs in algebraische Gleichungen um. Wichtige Eigenschaften:

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\,Y(s) - y(0), \qquad \mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0).$$

Für lineare Gleichungen werden Anfangswerte in die Transformierte integriert und anschließend $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ bestimmt.

(7) Lösungsprinzipien und Randprobleme.

- Superpositionsprinzip: Lösung von inhomogenen DGLs durch Addition der Teil-Lösungen.
- Rand- vs Anfangsproblem: Anfangswerte bzw. Randwerte festlegen, um Konstanten zu bestimmen.
- Stabilität und Langzeitverhalten: Einfluss der Eigenwerte auf das Verhalten.

(8) Anwendungen in der Technik.
- Mechanische Schwingungen (Massen-Feder-Dämpfer).
- Elektrische Schaltungen (RC-, RL-, RLC-Schaltungen).
- Wärmeleitung und Strömungsprobleme in linearen Modellen.

(9) Übungsbeispiele (Kurzform).
- Bestimme die Lösung der DGL erster Ordnung $y' + y = \sin x$.
- Löse $y'' - 4y' + 5y = 0$.
- Löse das System $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$.