Lernzettel

Maximum-Modulprinzip, Liouville-Theorem und Konsequenzen der Funktionentheorie

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Maximum-Modulprinzip, Liouville-Theorem und Konsequenzen der Funktionentheorie

(1) Maximum-Modulprinzip.
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ holomorph in Ω sowie stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Insbesondere kann das Maximum von $|f|$ in Ω nur auftreten, wenn f konstant ist.

Beispiele/Beobachtungen.

$$f(z) = z^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad |f(z)| = |z|^n$$

hat sein Maximum auf der Randkurve z mit festem Radius, d. h. auf $|z| = R$, nicht im Inneren.

(Beweisidee). Falls $|f|$ ein lokales Maximum in einem inneren Punkt $z_0 \in \Omega$ besitzt, dann folgt durch den Maximum-Modulprinzip, dass f in einer Umgebung von z_0 konstant ist. Damit ist f global konstant, falls Ω zusammenhängend ist.

(2) Liouville-Theorem.
Satz. Sei f ganzstendig (*entire*) und beschränkt auf $\mathbb{C}$. Dann ist f konstant.

Beweisidee. Für $R > 0$ sei $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Durch das Maximum-Modulprinzip gilt $|f^{(n)}(0)| \leq M(R)/R^n$ für alle $n \geq 0$. Da f beschränkt ist, wähle $R \to \infty$; dann gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 1$. Somit ist f konstant.

Beispiele. $|f(z)| = e^{\Re z}$ ist nicht beschränkt, daher kein Gegenbeispiel; $f(z) = \sin z$ ist ebenfalls nicht beschränkt, etc.

(3) Konsequenzen der Funktionentheorie.
- Nicht-konstante ganze Funktionen sind unbeschränkt.
- Offenes Abbildungsverhalten: Jede nicht-konstante holomorphe Funktion ist offen (Abbildung offner Mengen auf offene Mengen).
- Identitätssatz: Falls f in einem zusammenhängenden Gebiet D holomorph ist und in einer Teilmenge mit Häufungspunkt in D verschwindet, dann gilt $f \equiv 0$.
- Weitere Folgerung: Beschränkte ganze Funktionen sind konstant (Liouville); Polynomielle Funktionen wachsen unbeschränkt, weshalb sie keine beschränkten asymptotischen Werte haben.

Zusammenfassung.
- Maximum-Modulprinzip schränkt das Maximum des Betrags einer analytischen Funktion auf die Randmenge.
- Liouville zeigt, dass Beschränktheit einer ganzen Funktion ausreicht, um Konstanz zu folgern.
- Daraus folgen fundamentale Eigenschaften der Funktionentheorie wie Offenheit von Abbildungen sowie der Identitätssatz, die als Bausteine der weiteren Theorie dienen.