Lernzettel

Harmonische Funktionen und der Zusammenhang mit holomorphen Funktionen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Harmonische Funktionen und der Zusammenhang mit holomorphen Funktionen

(1) Definition und Grundbegriffe.
Eine Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dabei ist der Operator Δ der Laplace-Operator. Harmonische Funktionen treten als Real- bzw. Imaginärteile von holomorphen Funktionen auf.

(2) Zusammenhang mit holomorphen Funktionen.
Sei $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion in Ω mit $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$$

und sowohl u als auch v sind harmonisch:

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0.$$

(3) Harmonicer Konjugat und lokale Holomorphie.
Unter der Annahme, dass Ω einfach zusammenhängend ist, existiert zu jeder harmonischen Funktion u lokal eine Konjugatfunktion v, sodass $f = u + iv$ holomorph in Ω ist. Diese Konjugate sind eindeutigbis auf eine additive Konstante.

(4) Beispiele.

- Beispiel 1: $f(z) = z^2$ mit $z = x + iy$. Dann

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy,$$

und

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

- Beispiel 2: $f(z) = z$. Dann

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = y,$$

und

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

(5) Zusatz-Eigenschaften.
- Mean-Wert-Eigenschaft: Eine harmonische Funktion erfüllt das Mittelwertprinzip über Kreise:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

- Maximumprinzip: Auf kompakten Teilmengen eines Gebietes nimmt eine harmonische Funktion das Maximum bzw. Minimum nur an Randpunkten an (außer Konstante).

(6) Geometrische Interpretation.
- Harmonische Funktionen modellieren Potentialfelder (z. B. Elektromagnetik, Strömungs- bzw. Wärmeleitung).
- Holomorphe Funktionen liefern durch u und v Konformale Abbildungen: Lokale Winkel werden erhalten.